ANALISI MATEMATICA A - 6 aprile 2009

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio n° 4 ed è il fattore dell'unità immaginaria all'interno del primo fattore.

Fila 1

1. (a) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; non ci sono simmetrie.

(b) Non ci sono asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{2-x}{3(x+1)} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\operatorname{dom} f' = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset \operatorname{dom} f$; $x = -\frac{1}{2}$ punto a tangente verticale: $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$.

(d) f strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$; f strettamente decrescente in $(2, +\infty)$, $x = 2$ è punto di massimo assoluto, $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Non esistono punti di minimo assoluto in quanto f è illimitata inferiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 7x - 5}{3(x+1)^2 \sqrt{(2x+1)^3}}$

(f) Poiché f è descrescente in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, allora f risulta convessa in un intorno di $+\infty$. Si deduce che esiste un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $(2, +\infty)$.

2. La sottosuccessione per n pari è crescente, la sottosuccessione per n dispari è decrescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'unione tra il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro $(4, 0)$ e raggio 1.

4. $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_2 = \ i$, $z_3 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $z_4 = -i$, $z_5 = -3i$.

5. $\ell = -3$.

6. Se $\beta < 1$ $\ell = 1$, se $\beta = 1$ $\ell = e^{3/2}$, se $\beta > 1$ $\ell = +\infty$.

7. f è continua in $x = 0$ per $\alpha = 3$. Se $\alpha \neq 3$ allora il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Nel caso in cui $\alpha = 3$, f non è derivabile in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è di cuspide.

Fila 2

1. (a) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; non ci sono simmetrie.

(b) Non ci sono asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{3-x}{4(x+1)} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\operatorname{dom} f' = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset \operatorname{dom} f$; $x = -\frac{1}{2}$ punto a tangente verticale: $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$.

(d) f strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; f strettamente decrescente in $(3, +\infty)$, $x = 3$ è punto di massimo assoluto, $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Non esistono punti di minimo assoluto in quanto f è illimitata inferiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 10x - 7}{4(x+1)^2 \sqrt{(2x+1)^3}}$

(f) Poiché f è descrescente in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, allora f risulta convessa in un intorno di $+\infty$. Si deduce che esiste un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $(3, +\infty)$.

2. La sottosuccessione per n pari è crescente, la sottosuccessione per n dispari è decrescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'unione tra il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro $(9, 0)$ e raggio 1.

4. $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\, i$, $z_3 = -\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $z_4 = -i$, $z_5 = -5i$.

5. $\ell = -3$.

6. Se $\beta < 1$ $\ell = 1$, se $\beta = 1$ $\ell = e^{5/2}$, se $\beta > 1$ $\ell = +\infty$.

7. f è continua in $x = 0$ per $\alpha = 5$. Se $\alpha \neq 5$ allora il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Nel caso in cui $\alpha = 5$, f non è derivabile in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è di cuspide.

Fila 3

1. (a) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; non ci sono simmetrie.

(b) Non ci sono asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{4-x}{5(x+1)}\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\operatorname{dom} f' = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset \operatorname{dom} f$; $x = -\frac{1}{2}$ punto a tangente verticale: $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$.

(d) f strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$; f strettamente decrescente in $(4, +\infty)$, $x = 4$ è punto di massimo assoluto, $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Non esistono punti di minimo assoluto in quanto f è illimitata inferiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 13x - 9}{5(x+1)^2\, \sqrt{(2x+1)^3}}$

(f) Poiché f è descrescente in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, allora f risulta convessa in un intorno di $+\infty$. Si deduce che esiste un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $(4, +\infty)$.

2. La sottosuccessione per n pari è crescente, la sottosuccessione per n dispari è decrescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'unione tra il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro $(16, 0)$ e raggio 1.

4. $z_1 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{3}\, i$, $z_3 = -\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $z_4 = -i$, $z_5 = -7i$.

5. $\ell = -3$.

6. Se $\beta < 1$ $\ell = 1$, se $\beta = 1$ $\ell = e^{7/2}$, se $\beta > 1$ $\ell = +\infty$.

7. f è continua in $x = 0$ per $\alpha = 7$. Se $\alpha \neq 7$ allora il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Nel caso in cui $\alpha = 7$, f non è derivabile in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è di cuspide.

Fila 4

1. (a) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; non ci sono simmetrie.

(b) Non ci sono asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{5-x}{6(x+1)} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\operatorname{dom} f' = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset \operatorname{dom} f$; $x = -\frac{1}{2}$ punto a tangente verticale: $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$.

(d) f strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$; f strettamente decrescente in $(5, +\infty)$, $x = 5$ è punto di massimo assoluto, $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Non esistono punti di minimo assoluto in quanto f è illimitata inferiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 16x - 11}{6(x+1)^2 \sqrt{(2x+1)^3}}$

(f) Poiché f è descrescente in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, allora f risulta convessa in un intorno di $+\infty$. Si deduce che esiste un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $(5, +\infty)$.

2. La sottosuccessione per n pari è crescente, la sottosuccessione per n dispari è decrescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'unione tra il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro $(25, 0)$ e raggio 1.

4. $z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{4}\, i$, $z_3 = -\sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $z_4 = -i$, $z_5 = -9i$.

5. $\ell = -3$.

6. Se $\beta < 1$ $\ell = 1$, se $\beta = 1$ $\ell = e^{9/2}$, se $\beta > 1$ $\ell = +\infty$.

7. f è continua in $x = 0$ per $\alpha = 9$. Se $\alpha \neq 9$ allora il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Nel caso in cui $\alpha = 9$, f non è derivabile in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è di cuspide.

Fila 5

1. (a) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; non ci sono simmetrie.

(b) Non ci sono asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{6-x}{7(x+1)} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\operatorname{dom} f' = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset \operatorname{dom} f$; $x = -\frac{1}{2}$ punto a tangente verticale: $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$.

(d) f strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$; f strettamente decrescente in $(6, +\infty)$, $x = 6$ è punto di massimo assoluto, $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Non esistono punti di minimo assoluto in quanto f è illimitata inferiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 19x - 13}{7(x+1)^2 \sqrt{(2x+1)^3}}$

(f) Poiché f è descrescente in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, allora f risulta convessa in un intorno di $+\infty$. Si deduce che esiste un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $(6, +\infty)$.

2. La sottosuccessione per n pari è crescente, la sottosuccessione per n dispari è decrescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'unione tra il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro $(36, 0)$ e raggio 1.

4. $z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{5}\, i$, $z_3 = -\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $z_4 = -i$, $z_5 = -11i$.

5. $\ell = -3$.

6. Se $\beta < 1$ $\ell = 1$, se $\beta = 1$ $\ell = e^{11/2}$, se $\beta > 1$ $\ell = +\infty$.

7. f è continua in $x = 0$ per $\alpha = 11$. Se $\alpha \neq 11$ allora il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Nel caso in cui $\alpha = 11$, f non è derivabile in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è di cuspide.

Fila 6

1. (a) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; non ci sono simmetrie.

(b) Non ci sono asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{7 - x}{8(x+1)} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $\operatorname{dom} f' = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset \operatorname{dom} f$; $x = -\frac{1}{2}$ punto a tangente verticale: $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$.

(d) f strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 7\right)$; f strettamente decrescente in $(7, +\infty)$, $x = 7$ è punto di massimo assoluto, $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Non esistono punti di minimo assoluto in quanto f è illimitata inferiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 22x - 15}{8(x+1)^2\,\sqrt{(2x+1)^3}}$

(f) Poiché f è descrescente in un intorno di $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, allora f risulta convessa in un intorno di $+\infty$. Si deduce che esiste un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $(7, +\infty)$.

2. La sottosuccessione per n pari è crescente, la sottosuccessione per n dispari è decrescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = -1$, $\sup A = 1$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'unione tra il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro $(49, 0)$ e raggio 1.

4. $z_1 = \sqrt[3]{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{6}\, i$, $z_3 = -\sqrt[3]{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $z_4 = -i$, $z_5 = -13i$.

5. $\ell = -3$.

6. Se $\beta < 1$ $\ell = 1$, se $\beta = 1$ $\ell = e^{13/2}$, se $\beta > 1$ $\ell = +\infty$.

7. f è continua in $x = 0$ per $\alpha = 13$. Se $\alpha \neq 13$ allora il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Nel caso in cui $\alpha = 13$, f non è derivabile in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è di cuspide.
