ANALISI MATEMATICA A - 26 novembre 2008 - Allievi INFL

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio n° 1 ed è l'addendo costante nella definizione di f.

Fila 1

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $[0, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. $\lim_{x\to(\frac{3}{2}\pi)^\pm} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$; f strettamente decrescente in $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''(\pi/2) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ovvero si ha un punto di flesso in $(0, \pi/2)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$.

2. La successione $a_n = 8\arctan\left[\frac{2n}{2n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 2\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{2}\, i$.

5. $\ell = -2$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 7$, $\ell = 2$ se $\alpha = 7$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 7$.

7. f è discontinua in $x = 7$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 7$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. I punti $x = 0$ e $x = 2$ sono entrambi punti a tangente verticale.

Fila 2

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $[0, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. $\lim_{x\to(\frac{3}{2}\pi)^\pm} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$; f strettamente decrescente in $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''(\pi/2) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ovvero si ha un punto di flesso in $(0, \pi/2)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$.

2. La successione $a_n = 12 \arctan\left[\frac{3n}{3n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 3\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{3}\, i$.

5. $\ell = -3$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 6$, $\ell = 3$ se $\alpha = 6$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 6$.

7. f è discontinua in $x = 6$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 6$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. I punti $x = 0$ e $x = 3$ sono entrambi punti a tangente verticale.

Fila 3

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $[0, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$.
$\lim_{x\to(\frac{3}{2}\pi)^\pm} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$; f strettamente decrescente in $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''(\pi/2) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ovvero si ha un punto di flesso in $(0, \pi/2)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$.

2. La successione $a_n = 16 \arctan\left[\frac{4n}{4n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 4\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{4}\, i$.

5. $\ell = -4$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 5$, $\ell = 4$ se $\alpha = 5$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 5$.

7. f è discontinua in $x = 5$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 5$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. I punti $x = 0$ e $x = 4$ sono entrambi punti a tangente verticale.

Fila 4

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $[0, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. $\lim_{x\to(\frac{3}{2}\pi)^\pm} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$; f strettamente decrescente in $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''(\pi/2) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ovvero si ha un punto di flesso in $(0, \pi/2)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$.

2. La successione $a_n = 20 \arctan\left[\frac{5n}{5n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 5\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{5}\, i$.

5. $\ell = -5$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 4$, $\ell = 5$ se $\alpha = 4$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 4$.

7. f è discontinua in $x = 4$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 4$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$. I punti $x = 0$ e $x = 5$ sono entrambi punti a tangente verticale.

Fila 5

1. (a) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $[0, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. $\lim\limits_{x \to (\frac{3}{2}\pi)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\mathrm{dom}\, f' = \mathrm{dom}\, f$.

(d) f strettamente crescente in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$; f strettamente decrescente in $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''(\pi/2) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ovvero si ha un punto di flesso in $(0, \pi/2)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$.

2. La successione $a_n = 24 \arctan\left[\frac{6n}{6n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 6\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{6}\, i$.

5. $\ell = -6$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 3$, $\ell = 6$ se $\alpha = 3$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 3$.

7. f è discontinua in $x = 3$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 3$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$. I punti $x = 0$ e $x = 6$ sono entrambi punti a tangente verticale.

Fila 6

1. (a) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $[0, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. $\lim\limits_{x \to (\frac{3}{2}\pi)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\mathrm{dom}\, f' = \mathrm{dom}\, f$.

(d) f strettamente crescente in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$; f strettamente decrescente in $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''(\pi/2) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ovvero si ha un punto di flesso in $(0, \pi/2)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$.

2. La successione $a_n = 28 \arctan\left[\frac{7n}{7n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 7\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{7}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{7}\, i$.

5. $\ell = -7$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 2$, $\ell = 7$ se $\alpha = 2$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 2$.

7. f è discontinua in $x = 2$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 2$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 7\}$. I punti $x = 0$ e $x = 7$ sono entrambi punti a tangente verticale.
