FORMULE DI TAYLOR DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

Ricordiamo che le funzioni iperboliche $\sinh$ e $\cosh$ sono definite come

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Ricordiamo che il polinomio di Taylor di grado $n \in \mathbb{N}$ e centro 0 della funzione esponenziale $f_+(x) = e^x$ è dato da

$$T^n(f_+)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Sostituendo $-x$ al posto di x nella formula precedente, otteniamo il polinomio di Taylor di grado n e centro 0 della funzione $f_-(x) = e^{-x}$:

$$T^n(f_-)(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\,.$$

Dalla definizione delle funzioni iperboliche, dalle espressioni dei polinomi di Taylor $T^n(f_+)$ e $T^n(f_-)$ e dalla

linearità dell'operazione T^n che associa ad una funzione f (n volte derivabile in un intorno di 0) il suo polinomio di Taylor di grado n, ricaviamo ora il polinomio di Taylor di grado n della funzione $\sinh$. Si calcola:

$$T^n(\sinh)(x) = \frac{1}{2}\left(T^n(f_+)(x) - T^n(f_-)(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + (1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(1-(-1)^n)}{2}\frac{x^n}{n!}\,.$$

Osservando che

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0\,, & \text{per } n \text{ pari}\,, \\ 2\,, & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

per ogni intero $k \geq 0$, si deduce per il polinomio di Taylor della funzione $\sinh$ di grado $n = 2k+1$ e centro

0 l'espressione seguente

$$T^{2k+1}(\sinh)(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}\,.$$

Si osserva che il polinomio di Taylor suddetto coinvolge soltanto le potenze di x con esponente dispari. Si confronti l'espressione predetta con quella del polinomio di Taylor di pari grado (e uguale centro 0) della funzione trigonometrica $\sin$,

$$T^{2k+1}(\sin)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}\,,$$

in cui compaiono esattamente gli stessi termini ma con segni alternati.

Si osserva anche che il polinomio di Taylor di $\sinh$ di grado $2k+2$ e centro 0, $T^{2k+2}(\sinh)$, coincide con $T^{2k+1}(\sinh)$; infatti il coefficiente della potenza di x

con esponente $2k+2$ (come quello di ogni potenza di x ad esponente pari) che interviene nell'espressione del polinomio $T^{2k+2}(\sinh)$ è zero.
Dalle considerazioni predette e dalla formula del Teorema di Taylor-Peano si ricava per la funzione $\sinh$ la seguente formula di Taylor:

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh x &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} + o(x^{2k+1}) \\ &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} + o(x^{2k+2})\,, \quad x \to 0\,,\ \forall\, k \geq 0\,.\end{aligned}}$$

La prima delle uguaglianze predette è conseguenza diretta del Teorema di Taylor-Peano per il polinomio di Taylor $T^{2k+1}(\sinh)$ di grado $2k+1$ e centro 0 per la funzione $\sinh$: la differenza $\sinh x - T^{2k+1}(\sinh)(x)$ è $o(x^{2k+1})$ per $x \to 0$. La seconda uguaglianza è conseguenza del fatto che $T^{2k+2}(\sinh) = T^{2k+1}(\sinh)$ (i polinomi di Taylor di $\sinh$ contengono solo le potenze di x ad esponente dispari).

Con considerazioni analoghe, ricaviamo ora l'espressione del polinomio di Taylor di grado n e centro 0 della funzione iperbolica $\cosh$. Si calcola:

$$T^n(\cosh)(x) = \frac{1}{2}\left(T^n(f_+)(x) + T^n(f_-)(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(1+(-1)^n)}{2}\frac{x^n}{n!}\,.$$

Osservando che

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2\,, & \text{per } n \text{ pari}\,, \\ 0\,, & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

per ogni intero $k \geq 0$, si deduce per il polinomio di Taylor della funzione $\cosh$ di grado $n = 2k$ e centro 0 l'espressione seguente

$$T^{2k}(\cosh)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\,.$$

Si osserva che il polinomio di Taylor suddetto coinvolge soltanto le potenze di x con esponente pari. Si con-

fronti l'espressione predetta con quella del polinomio di Taylor di pari grado (e uguale centro 0) della funzione trigonometrica $\cos$,

$$T^{2k}(\cos)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!},$$

in cui compaiono esattamente gli stessi termini ma con segni alternati.

Si osserva anche che il polinomio di Taylor di $\cosh$ di grado $2k+1$ e centro 0, $T^{2k+1}(\cosh)$, coincide con $T^{2k}(\cosh)$; infatti il coefficiente della potenza di x con esponente $2k+1$ (come quello di ogni potenza di x ad esponente dispari) che interviene nell'espressione del polinomio $T^{2k+1}(\cosh)$ è zero.

Dalle considerazioni predette e dalla formula del Teorema di Taylor-Peano si ricava per la funzione $\cosh$ la

seguente formula di Taylor:

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!} + o(x^{2k}) \\ &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!} + o(x^{2k+1})\,, \quad x \to 0\,,\ \forall\, k \geq 0\,.\end{aligned}}$$

Alle formule precedenti si applicano considerazioni analoghe a quelle relative alla funzione $\sinh$. La prima uguaglianza è conseguenza diretta del Teorema di Taylor-Peano per il polinomio di Taylor $T^{2k}(\cosh)$ di grado $2k$ e centro 0 per la funzione $\cosh$: la differenza $\cosh x - T^{2k}(\cosh)(x)$ è $o(x^{2k})$ per $x \to 0$. La seconda uguaglianza è conseguenza del fatto che $T^{2k+1}(\cosh) = T^{2k}(\cosh)$ (i polinomi di Taylor di $\cosh$ contengono solo le potenze di x ad esponente pari).