SVILUPPI DI TAYLOR NEL CALCOLO DEI LIMITI DI FUNZIONE

Negli sviluppi di Taylor è importante riportare sempre il resto!
Consideriamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right]}{3(\sinh x^2-\sin^2 x)}\,.$$

Effettuando la sostituzione $y=x^2$ (si ha $y\to 0$ quando $x\to 0$) nella formula di Taylor

$$\sinh y = y+\frac{y^3}{3!}+o(y^4)\,,\quad y\to 0\,,$$

e usando anche

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\,,\quad x\to 0\,,$$

otteniamo per il denominatore lo sviluppo

$$
\begin{aligned}
&3(\sinh x^2 - \sin^2 x) \\
&\quad = 3\left(x^2 + \tfrac{x^6}{6} + o(x^8) - (x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4))^2\right) \\
&\quad = 3\left(x^2 + \tfrac{x^6}{3!} + o(x^8) - x^2 - \tfrac{x^6}{36} + \tfrac{x^4}{3} + o(x^5)\right) \\
&\quad = x^4 + o(x^5) = x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Questa formula ci dice che il denominatore tende a zero come un infinitesimo di ordine 4 (il denominatore "tende a zero come x^4 per $x \to 0$"); pertanto, nello sviluppo di Taylor che sostituiremo al numeratore, dovremo progredire nella sequenza delle potenze di x *almeno fino allo stesso ordine* 4.
Nel numeratore, facciamo uso della formula di Taylor

$$\log(1+z) = z + o(z)\,, \quad z \to 0\,, \tag{1}$$

con $z = x + 3x^2$. Se nella formula che si ricava effettuando in (1) la sostituzione predetta non riportiamo il resto, otterremmo per il numeratore la

rappresentazione

$$x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right]=x^2\left[x+3x^2-x\right]$$

$$=3x^4\,,\quad x\to 0\,.$$

Questo potrebbe erroneamente indurre a ritenere che che il numeratore della funzione "tende a zero come $3x^4$ per $x\to 0$". Se invece facciamo uso della formula di Taylor (1) *comprensiva del suo resto*, abbiamo:

$$x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right]$$

$$=x^2\left[x+3x^2+o(x+3x^2)-x\right]$$

$$=x^2\left[3x^2+o(x)\right]=3x^4+o(x^3)\,,\quad x\to 0\,.$$

Questa formula evidenzia il fatto che ci siamo fermati ad un ordine troppo basso nello sviluppo di Taylor (1) per la funzione $\log(1+z)$; infatti il resto che interviene nella rappresentazione predetta è soltanto trascurabile rispetto ad x^3 (per $x\to 0$): in particolare, tale resto potrebbe contenere un termine infinitesimo di ordine

4.

Dobbiamo pertanto ritornare allo sviluppo di Taylor per $\log(1+z)$, progredendo ad un ordine successivo:

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2)\,, \quad z \to 0\,.$$

Sostituendo nuovamente $z = x + 3x^2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} & x^2\left[\log(1+x+3x^2) - x\right] \\ & = x^2\left[3x^2 - \tfrac{1}{2}(x+3x^2)^2 + o((x+3x^2)^2)\right] \\ & = x^2\left[3x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{9}{2}x^4 - 3x^3 + o(x^2)\right] \\ & = \tfrac{5}{2}x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

Come si deduce dalla formula precedente, il numeratore della funzione di cui dobbiamo calcolare il limite "tende a zero per $x \to 0$ come $\frac{5}{2}x^4$".

In conclusione, ricaviamo che il limite da calcolarsi diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{5}{2}\,.$$