QUALCHE APPLICAZIONE DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR NEL CALCOLO DI LIMITI

Esercizio 1. Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(e^{x^2}-1-x^2\right)}{3x^4}\,.$$

A priori il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sostituiamo alla funzione $f(x) = 2\sin\left(e^{x^2}-1-x^2\right)$ un suo sviluppo di Taylor con centro in $x_0 = 0$. Ponendo nella formula

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^2)\,, \quad y \to 0\,,$$

$y = x^2$ (si osservi che $y = x^2 \to 0$ quando $x \to 0$) otteniamo

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,$$

da cui si trova che

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right), \quad x \to 0\,.$$

Ponendo nella formula di Taylor

$$\sin z = z + o(z)\,, \quad z \to 0\,,$$

$z = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ (si osservi che $z \to 0$ quando $x \to 0$), otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4) + o\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\right) \\ &= x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

La formula precedente fornisce lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x)$ con centro in $x_0 = 0$.

Usando tale formula nel calcolo del limite si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(e^{x^2}-1-x^2\right)}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+o(x^4)}{3x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(1+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} 6n^\alpha \left(\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2}\right).$$

Ponendo nella formula di Taylor

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4), \quad y \to 0,$$

$y = \frac{1}{n}$ (si noti che $y = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$), si ottiene

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \to +\infty,$$

da cui si deduce che

$$\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \frac{1}{4!n^4}\left(1 + 4!n^4 o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \sim \frac{1}{4!n^4}, \quad n \to +\infty.$$

Utilizzando la valutazione asintotica precedente nel calcolo del limite troviamo

$$\lim_{n\to\infty} 6n^\alpha \left(\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^\alpha}{4!n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-4}}{4} = \begin{cases} +\infty\,, \text{ se } \alpha > 4\,, \\ \\ \dfrac{1}{4}\,, \text{ se } \alpha = 4\,, \\ \\ 0\,, \text{ se } \alpha < 4\,. \end{cases}$$