POLINOMI DI TAYLOR E CALCOLO DI LIMITI

Sia $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ infinitesima per } x \to x_0)\,.$$

Supponiamo anche f derivabile *infinite* volte in x_0, in modo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, valga la formula

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nelle ipotesi precedenti si ha $f(x_0) = 0$, quindi (1) si riduce a:

$$\begin{aligned} f(x) = & f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

- Supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,.$$

• Supponiamo ora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \,, \quad x \to x_0 \,.$$

• Supponiamo, in generale, che $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \,, \quad x \to x_0 \,.$$

Conclusione: il primo termine non nullo (con coefficiente diverso da zero) nello sviluppo di Taylor di f con centro in x_0 determina l'*ordine di infinitesimo* di f (rispetto all'*infinitesimo campione* $(x - x_0)$) per $x \to x_0$.

Supponiamo ora di dover calcolare un limite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \,,$$

con $f, g :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ infinitamente derivabili in x_0 e tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

(così che in particolare $f(x_0) = g(x_0) = 0$).
Dagli sviluppi di Taylor di f e g con centro in x_0, si determinano gli *ordini di infinitesimo* di f e di g per $x \to x_0$ (rispetto a $(x - x_0)$).
Supponendo che per $h, k \in \mathbb{N}$ con $h, k \geq 1$ si abbia

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(h-1)}(x_0) = 0 \,, \\ g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(k-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

e che le prime derivate non nulle di f e di g in x_0 siano $f^{(h)}(x_0)$ e $g^{(k)}(x_0)$ rispettivamente, ricaviamo in

particolare che

$$f(x) \sim \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h\,, \quad x \to x_0\,,$$

$$g(x) \sim \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,, \quad x \to x_0\,,$$

da cui si deduce che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h}{\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

$$= \frac{k!\, f^{(h)}(x_0)}{h!\, g^{(k)}(x_0)} \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^{h-k}\,.$$