PROPRIETÀ DEGLI "o PICCOLO"

Si riportano qui alcune proprietà degli "o piccolo", utili nel calcolo dei limiti di funzione attraverso gli sviluppi di Taylor.
In tutte le formule che seguono, si suppone:

$$x \to x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

1. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$, $h < k$:

$$f(x) = o\left((x - x_0)^k\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = o\left((x - x_0)^h\right)\,,$$

In particolare: $(x - x_0)^k = o\left((x - x_0)^h\right)$;

2. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left((x - x_0)^h\right) + o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{\min\{h,k\}}\right)\,;$$

3. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$(x - x_0)^h \cdot o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{h+k}\right) \ ,$$

$$o\left((x - x_0)^h\right) \cdot o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{h+k}\right) \ ;$$

4. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$\left(o(x - x_0)^k\right)^h = o\left((x - x_0)^{kh}\right) \ ;$$

5. $\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$c \cdot o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^k\right) \ ,$$

$$o\left(c \cdot (x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^k\right) \ ;$$

6. $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left((x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right)\right) = o\left((x - x_0)^k\right) \ .$$

Analoghe formule valgono per $x \to +\infty$, quando le quantità del tipo $o((x-x_0)^k)$ sono sostituite da quantità del tipo $o(x^{-k})$ con $k \in [0, +\infty[$. Abbiamo quindi per $x \to +\infty$:

7. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$, $h < k$:

$$f(x) = o\left(x^{-k}\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = o\left(x^{-h}\right) \ ,$$

In particolare: $x^{-k} = o\left(x^{-h}\right)$;

8. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left(x^{-h}\right) + o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-\min\{h,k\}}\right) \ ;$$

9. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$x^{-h} \cdot\ o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-(h+k)}\right) \ ,$$

$$o\left(x^{-h}\right) \cdot o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-(h+k)}\right) \ ;$$

10. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$\left(o(x^{-k})\right)^h = o\left(x^{-kh}\right) \ ;$$

11. $\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$c \cdot o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-k}\right) \ ,$$

$$o\left(c \cdot x^{-k}\right) = o\left(x^{-k}\right) \ ;$$

12. $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left(x^{-k} + o\left(x^{-k}\right)\right) = o\left(x^{-k}\right) \ .$$

Formule analoghe alle $7 - 12$ valgono per $x \to -\infty$, se tutte le quantità $o(x^{-k})$, con $k \in [0, +\infty[$, sono sostituite dalle quantità $o((-x)^{-k})$.