SUCCESSIONI IN FORMA DI POTENZA

Proposizione 1. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche, con $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [0,+\infty] \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = L' \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Allora:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = L^{L'}\,, \quad$ se $L \in]0,+\infty[\,,\ L' \in \mathbb{R}\,,$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = +\infty\,, \quad$ se $\begin{cases} L \in]1,+\infty[\,,\ L' = +\infty\,, \\ L = +\infty\,,\ L' \in]0,+\infty]\,, \\ L \in]0,1[\,,\ L' = -\infty\,, \\ L = 0\,,\ L' \in [-\infty,0[\,, \end{cases}$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0\,, \quad$ se $\begin{cases} L \in]1,+\infty[\,,\ L' = -\infty\,, \\ L = +\infty\,,\ L' \in [-\infty,0[\,, \\ L \in]0,1[\,,\ L' = +\infty\,, \\ L = 0\,,\ L' \in]0,+\infty]\,. \end{cases}$

La verifica delle relazioni di limite precedente si basa su:

I. L'identità $a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}$ ($a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$);

II. Le proprietà seguenti:

Proposizione 2. Se $\{c_n\}$ è una successione tale che $c_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L \in [0, +\infty]$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \log c_n = \begin{cases} \log L\,, & \text{se } L \in]0, +\infty[\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ -\infty\,, & \text{se } L = 0\,. \end{cases}$$

Proposizione 3. Se $\{c_n\}$ è una successione tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{c_n} = \begin{cases} e^L\,, & \text{se } L \in \mathbb{R}\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ 0\,, & \text{se } L = -\infty\,. \end{cases}$$

Il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n}$ presenta:

1. La forma indeterminata 0^0, quando $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$;

2. La forma indeterminata $+\infty^0$, quando $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$;

3. La forma indeterminata $1^{\pm\infty}$, quando $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$.