SUCCESSIONI

Teorema. *Dimostriamo che:*

$$\begin{array}{lcl} a_n \to L \in \overline{\mathbb{R}} & & \\ b_n \to L' \in \overline{\mathbb{R}} & \Rightarrow & a_n + b_n \to L + L' \\ L + L' \neq \pm\infty \mp \infty & & \end{array}$$

Dim.

Caso i: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono (cioè $L, L' \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ $\{a_n - L\}$ e $\{b_n - L'\}$ sono infinitesime
$\Rightarrow \{(a_n - L) + (b_n - L')\} = \{(a_n + b_n) - (L + L')\}$ è infinitesima $\Leftrightarrow a_n + b_n \to L + L'$

Caso ii: $\{a_n\}$ converge, $\{b_n\}$ diverge (cioè $L \in \mathbb{R}$ e $L' = \pm\infty$) $\Rightarrow \{a_n\}$ limitata $\Rightarrow \{a_n + b_n\}$ diverge

Caso iii: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ divergono (cioè $L = \pm\infty$ e $L' = \pm\infty$). Consideriamo il caso $L = L' = +\infty$.

$$\Rightarrow \forall\, M > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ \begin{cases} a_n \geq \frac{M}{2}\,,\ \forall\, n \geq m \\ \\ b_n \geq \frac{M}{2}\,,\ \forall\, n \geq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n + b_n \geq M,\ \forall\, n \geq m \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$$