## Studi di funzione

5) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}\,.$$

<u>Dominio di $f$ ed eventuali simmetrie</u>: Il dominio di $f$ è definito dall'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che verificano le condizioni:

$$(1): \ \frac{x}{x+1} \geq -1\,, \qquad (2): \ \frac{x}{x+1} \leq 1\,,$$

$$(3): \ x+1 \neq 0\,,$$

$$(4): \ 2x+1 \geq 0\,.$$

Risolviamo la disequazione (1)

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+1} \geq 0\,.$$

Poiché deve valere (4), le soluzioni della disequazione $(1)$ che interessano sono soltanto gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1\,.$$

Per quanto riguarda la (2), si ha:

$$(2) \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x+1} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{x+1} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x > -1\,.$$

Si trova, infine, che:

$$(3) \;\Leftrightarrow\; x \neq -1 \qquad \text{e} \qquad (4) \;\Leftrightarrow\; x \geq -\frac{1}{2}\,.$$

Dai conti precedenti si conclude pertanto che il dominio è costituito da

$$\operatorname{dom} f := \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\,.$$

La funzione $f$ non è pari né dispari, ed è continua nel suo dominio.

Limiti di $f$ agli estremi del dominio ed eventuali asintoti: Nel proprio dominio, la funzione $f$ è continua. L'unico limite da calcolare è quello a $+\infty$. Si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = -\infty\,.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoto obliquo a $+\infty$, calcolando il $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2x+1}}{x} = 0\,.$$

Questo indica che la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.

Derivabilità di $f$ e intervalli di monotonia: Studiamo ora la derivabilità di $f$. In conseguenza dei teoremi generali sul calcolo delle derivate, $f$ è certamente derivabile in tutti i punti $x \in \operatorname{dom} f$ per cui

$$-1 < \frac{x}{x+1} < 1 \quad \text{e} \quad 2x+1 > 0\,,$$

ovvero i punti dell'intervallo $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. In questi punti si calcola (usando le note formule di derivazione):

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}(x+1)} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2-x}{3\sqrt{2x+1}(x+1)}\,.$$

Studiamo il segno della derivata prima di $f$ nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Poichè per $x > -\frac{1}{2}$ si ha $\sqrt{2x+1}(x+1) > 0$, risulta che

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2\,.$$

Se ne deduce che

1. $f$ è monotona crescente in $\left]-\frac{1}{2}, 2\right[$

2. $f$ è monotona decrescente in $]2, +\infty[$.

In particolare, in $f$ ha un punto di massimo (assoluto) in $x = 2$.

Per quanto riguarda l'esistenza della derivata prima (destra) in $x = -\frac{1}{2}$, poiché $f$ è continua in $x = -\frac{1}{2}$, calcoliamo il limite destro di $f'$ in $x = -\frac{1}{2}$. Si trova che:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{2 - x}{3\sqrt{2x+1}(x+1)} = +\infty\,.$$

Questo significa che il grafico della funzione $f$ arriva nel punto $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ con retta tangente verticale (cioè la retta $x = -\frac{1}{2}$).

<u>Derivata seconda di $f$ e concavità/convessità</u>: Senza bisogno di calcolare esplicitamente la derivata seconda

di $f$, si evidenzia l'esistenza di un punto di flesso (a tangente obliqua) a destra del punto di massimo $x = 2$. Questo è deducibile dal fatto che $x = 2$ è un punto di massimo relativo (assoluto) per $f$, con $f'(2) = 0$ (cioè la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(2, f(2))$ è orizzontale), $f$ decresce in $[2, +\infty[$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x}{3\sqrt{2x + 1}(x + 1)} = 0$$

(ovvero la retta tangente al grafico della funzione nel generico punto $(x, f(x))$ tende a diventare parallela all'asse delle ascisse, al crescere di $x$. Questo indica cha la funzione, concava in un intorno di $x = 2$, deve necessariamente diventare convessa per $x$ sufficientemente grande; perció nell'intervallo $]2, +\infty[$ deve esistere un punto di flesso per $f$. La retta tangente al punto di flesso dovrà essere obliqua, in quanto $x = 2$ è il solo punto stazionario di $f$.

6) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1\,.$$

<u>Dominio di $f$ ed eventuali simmetrie</u>: Si trova subito che

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 0\} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

La funzione $f$ non è pari né dispari.

<u>Limiti di $f$ agli estremi del dominio ed eventuali asintoti</u>: Si calcola

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1 = 10$

  $\Rightarrow \ y = 10$ asintoto orizzontale sinistro (a $-\infty$)

- $\displaystyle\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm}\left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1 = +\infty$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \quad y = 2 \text{ asintoto orizzontale destro}$$

<u>Derivabilità di $f$ e intervalli di monotonia:</u> $f$ è derivabile nel suo dominio (cioè $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$) e

$$f'(x) = 2\left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\frac{-1}{(\arctan x)^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)\frac{\pi}{(\arctan x)^2(1+x^2)}\,.$$

Nel dominio di $f'$ si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\arctan x} \leq \frac{4}{\pi}\,.$$

Si trova allora che

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \arctan x > 0 \\ \arctan x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \arctan x < 0 \\ \arctan x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \text{ oppure } x \geq 1\,.$$

quindi:

1. $f$ crescente in $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$;

2. $f$ decrescente in $]0, 1[$;

3. $x = 1$ punto di minimo relativo di $f$ ($x = 1$ è punto di minimo <u>assoluto</u>, dato che $f(1) = 1 = \min f$).

<u>Derivata seconda di $f$ e concavità/convessità</u>: Senza bisogno di calcolare esplicitamente la derivata seconda di $f$, si osserva che la funzione deve ammettere un punto di flesso a destra di $x = 1$, in quanto $x = 1$ è punto di minimo relativo per $f$, con $f'(1) = 0$, la funzione è crescente in $[1, +\infty[$ e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Questo indica cha la funzione, convessa in un intorno di $x = 1$, deve necessariamente diventare concava per $x$ sufficientemente grande; perció nell'intervallo $]1, +\infty[$ deve esistere un punto di flesso per

$f$. La retta tangente al punto di flesso dovrà essere obliqua, in quanto $x = 1$ è il solo punto stazionario di $f$.

7) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x^2}\,.$$

<u>Dominio di $f$ ed eventuali simmetrie</u>: Si trova subito che

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[\,.$$

La funzione $f$ non è pari né dispari.

Dalla definizione di modulo, si ha che per $x \in \operatorname{dom} f$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^3}{x^2}\,, & \text{se } x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{x^3 - 1}{x^2}\,, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

La funzione $f$ è continua nel suo dominio.

Limiti di $f$ agli estremi del dominio ed eventuali asintoti:

Si calcola

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x^3-1|}{x^2} = +\infty$$

  $\Rightarrow \; x = 0$ asintoto verticale

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty\,.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoto obliquo a $+\infty$, calcolando il $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3-1|}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^3} = 1\,.$$

Quindi, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3-1|}{x^2} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0\,.$$

I limiti precedenti indicano che la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$ per $f$.

Analogamente, si trova che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3-1|}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^3} = -1\,.$$

e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$, da cui risulta che la retta $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per $f$.

<u>Derivabilità di $f$ e intervalli di monotonia</u>: dai teoremi generali sul calcolo delle derivate, risulta che $f$ è certamente derivabile in ogni punto $x \in \operatorname{dom} f$ per cui $x \neq 1$ e, usando le note formule di derivazione, si calcola:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2 \cdot x^2 - (1-x^3)\cdot 2x}{x^4} = -1 - \dfrac{2}{x^3}\,, & \text{se } x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3-1)\cdot 2x}{x^4} = 1 + \dfrac{2}{x^3}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Derivabilità di $f$ in $x = 1$:
Poichè la funzione $f$ è continua in $\operatorname{dom} f$ e derivabile in $\operatorname{dom} f \setminus \{1\}$, possiamo controllare la derivabilità di $f$ in $x = 1$ calcolando il $\lim_{x \to 1} f'(x)$. Si trova:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -1 - \frac{2}{x^3} = -3\,,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{2}{x^3} = 3\,,$$

da cui si deduce che $x = 1$ è un punto angoloso per $f$ (con $f'_-(1) = -3$ e $f'_+(1) = 3$).
Per quanto riguarda il segno della derivata prima di $f$, si trova allora che:

- Per $x > 1$: $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^3} > 0$

- Per $x < 1$:

$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -1 - \frac{2}{x^3} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2 + x^3}{x^3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow\; -\sqrt[3]{2} \leq x < 0$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt[3]{2} \leq x < 0 \text{ oppure } x > 1\,.$$

quindi:

1. $f$ crescente in $]-\sqrt[3]{2}, 0[\cup]1, +\infty[$;

2. $f$ decrescente in $]-\infty, -\sqrt[3]{2}[\cup]0, 1[$;

3. $x = -\sqrt[3]{2}$ è un punto di minimo relativo per $f$;

3. $x = 1$ punto di minimo relativo per $f$ ($x = 1$ è anche punto di minimo assoluto, dato che $f(1) = 0 = \min f$).

<u>Derivata seconda di $f$ e concavità/convessità:</u> per $x \in \operatorname{dom} f \setminus \{1\}$ si calcola direttamente

$$f''(x) = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{x^6} \cdot 3x^2 = \dfrac{6}{x^4}\,, & \text{se } x < 1 \\[2ex] -2 \cdot \dfrac{1}{x^6} \cdot 3x^2 = -\dfrac{6}{x^4}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Lo studio del segno di $f''$ è evidente e, da questo, si ricava che

1. $f$ è convessa in $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$,

2. $f$ è concava in $]1, +\infty[$.

8) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x+2}{|\log(x+2)|}\,.$$

Osserviamo anzitutto che $f$ si ottiene traslando di $2$, nella direzione negativa dell'asse $x$, la funzione

$$g(x) = \frac{x}{|\log x|}$$

cioè abbiamo $f(x) = g(x+2)$. Possiamo pertanto concentrarci sullo studio della funzione $g$, deducendo da esso il comportamento di $f$. Abbiamo:

$$\operatorname{dom} g = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \ \text{ e } \ \log x \neq 0\} = ]0,1[\cup]1,+\infty[\,.$$

La funzione non è pari né dispari.
La funzione $g$ è continua nel suo dominio.

Dalla definizione di modulo, si ha che:

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\log x}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{x}{\log x}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

<u>Limiti di $g$ agli estremi del domino</u>:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|\log x|} = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{|\log x|} = +\infty$$

$$\Rightarrow \;\; x = 1 \;\; \text{asintoto verticale}\,.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{|\log x|} = +\infty\,.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoto obliquo a $+\infty$ per $g$, calcolando il $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. Si trova:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{|\log x|} = 0\,.$$

Questo indica che la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.
Studiamo ora la derivabilità di $g$. In conseguenza dei teoremi sul calcolo delle derivate, $g$ è derivabile nel suo dominio e la sua derivata prima è

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\log x - x \cdot \frac{1}{x}}{\log^2 x} = -\dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno di $g'$, abbiamo:

Per $0 < x < 1$

$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\log x - 1}{\log^2 x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq e\,.$$

Per $x > 1$:

$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log x - 1}{\log^2 x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e\,.$$

Quindi abbiamo che $g$ è

1. crescente in $]0, 1[\cup]e, +\infty[$

2. decrescente in $]1, e[$.

In particolare, in $x = e$ $g$ ha un punto di minimo relativo (non assoluto, perchè $g(e) = e$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$).

Calcoliamo la <u>derivata seconda</u> di $g$ e studiamone il segno, al fine di determinare gli intervalli di concavità/convessità di $g$. In $]0, +\infty[$, $g'$ è derivabile. Per $0 < x < 1$ si calcola:

$$g''(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot \log^2 x - (\log x - 1) \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}}{\log^4 x} = -\frac{2 - \log x}{x \log^3 x}\,.$$

Procedendo analogamente nel caso $x > 1$, in definitiva si trova:

$$g''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2 - \log x}{x \log^3 x}, & 0 < x < 1 \\ \\ \dfrac{2 - \log x}{x \log^3 x}, & x > 1\,. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno di $g''$, si trova:

Per $0 < x < 1$:

$$g''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2 - \log x}{x \log^3 x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 - \log x}{x \log^3 x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \log x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq e^2\,.$$

Per $x > 1$:

$$g''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 - \log x}{x \log^3 x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \log x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq e^2\,.$$

Se ne deduce che

1. $g$ è convessa in $]0,1[\cup]1,e^2[$;

2. concava in $]e^2,+\infty[$.

In $x=e^2$, $g$ ha un p.to di flesso (a tangente obliqua).

Poichè $f(x)=g(x+2)$, il grafico di $f$ si può ottenere traslando di $2$ il grafico di $g$ nella direzione negativa dell'asse delle ascisse.