SOMMATORIA

Supponiamo assegnata una successione numerica $\{a_k\}$ e siano m ed n due numeri naturali con $m \leq n$. Per esprimere la somma dei termini a_m, a_{m+1}, ..., a_n si può usare, in luogo della scrittura tradizionale $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$, il simbolo di *sommatoria*, cioè:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

1. Il simbolo Σ sottintende un'operazione di *somma* che si applica alle quantità del tipo a_k specificate accanto.

2. I valori numerici m ed n (al di sotto e al di sopra del simbolo Σ) servono a specificare esattamente *quali sono i termini a_k coinvolti nell'operazione di somma* indicata da Σ. Più precisamente essi indicano che la somma si effettua sui numeri del tipo a_k, corrispondenti a *tutti* i valori interi di k *compresi* tra gli estremi m ed n.

Esempi

1. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$

2. $\sum_{k=3}^{100} k^2 = 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$

Osservazioni

Nel simbolo si sommatoria $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$, l'indice k è *muto*, ossia: se si sostituisce k con i, j, o qualsiasi altra lettera (in tutte le sue occorrenze), il valore dell'espressione non cambia, cioè:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Ciò che conta nella scrittura $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ è:

1. L'espressione di a_k, ossia il tipo di dipendenza dall'indice k (es: $a_k = \frac{1}{k}$, $a_k = k^2$, $a_k = \log k$...);
2. I numeri $m \leq n$, indicanti gli estremi dell'insieme di valori assunti dall'indice k.

Cambiamento di indice

Consideriamo $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ e introduciamo una nuova variabile j definita da

$$j = p - k\,,$$

dove p è un intero positivo assegnato. Riformuliamo la sommatoria $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ in termini del nuovo indice j. L'insieme di valori assunti da k è $\{m, m+1, \ldots, n\}$. I corrispondenti valori di j si calcolano osservando che

$$\begin{aligned} & m \le k \le n \iff -n \le -k \le -m \\ & \iff p-n \le p-k \le p-m \iff p-n \le j \le p-m \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=p-n}^{p-m} a_{p-j}$$

Ugualmente, se poniamo $k = h - p$, abbiamo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{h=m+p}^{n+p} a_{h-p}$$

Esempio

$$\sum_{k=4}^{10} \frac{1}{k^2} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{(j+3)^2} = \sum_{\ell=10}^{16} \frac{1}{(20-\ell)^2}$$

Altre proprietà della sommatoria (per $m = 0$)

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\,; \quad \sum_{k=0}^{n} c a_k = c\sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0\,;$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k\,, \quad m \le q < n\,.$$

Definizione ricorsiva della sommatoria

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0\,, \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}\,.$$

PRODUTTORIA

Data una successione $\{a_k\}$ e due numeri naturali m ed n, con $m \leq n$, per esprimere il prodotto dei fattori a_m, a_{m+1}, ..., a_n si usa il simbolo di *produttoria*

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \dots a_n$$

1. Il simbolo $\prod$ sottintende un'operazione di *prodotto* che si applica alle quantità del tipo a_k.

2. I valori numerici m ed n servono a specificare esattamente *quali sono i fattori* a_k *coinvolti nell'operazione di prodotto* indicata da $\prod$. Essi indicano che il prodotto si effettua sugli a_k, corrispondenti a *tutti* i valori interi di k *compresi* tra m ed n.

Esempio

$$\prod_{k=3}^{20} \frac{k+1}{\log k} = \frac{4}{\log 3} \cdot \frac{5}{\log 4} \dots \frac{21}{\log(20)}$$