Serie telescopiche

Si dice **serie telescopica** una serie del tipo:

$$\sum_{n=m}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) \quad \left(\text{oppure } \sum_{n=m}^{+\infty} (b_{n+1} - b_n)\right), \quad (\mathbf{T})$$

in cui $m \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ sono assegnati.

ESEMPIO: per $m = 1$ e $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$, si ha la serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

La forma di una serie telescopica consente il calcolo esplicito della somma parziale $n-$ma

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}), \quad n \geq m\,.$$

Si trova infatti:

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1})$$

$$= (b_m - b_{m+1}) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1})$$

$$= b_m - b_{n+1}$$

Ne segue che, se il limite di $\{b_n\}$ esiste, la serie $(\mathbf{T})$ non oscilla e la sua somma è data da:

$$\sum_{n=m}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} (b_m - b_{n+1})$$

$$= b_m - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_m - \lim_{n\to+\infty} b_n \,.$$

Ritornando alla serie di Mengoli, in cui $m = 1$ e $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$, si ha che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ è una serie convergente e la sua somma vale:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1 \,.$$