SERIE NUMERICHE

Con l'introduzione delle serie, ci si propone di estendere l'operazione di somma ad un numero infinito di addendi.

Def. Data una successione $\{a_n\}$, si chiama **serie di termini** a_n la successione $\{s_n\}$ il cui termine $n-$mo s_n è definito come

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

In maniera più esplicita, la successione $\{s_n\}$ è la funzione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ 0 &\mapsto s_0 = a_0 \\ 1 &\mapsto s_1 = a_0 + a_1 \\ 2 &\mapsto s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \\ n &\mapsto s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\ &\dots \end{aligned}$$

- Il termine $n-$mo s_n della serie $\{s_n\}$ si chiama **somma parziale** $n-$**ma della serie** (o **ridotta** $n-$**ma della serie**)

- Data una successione $\{a_n\}$, la serie di termini a_n si indica abitualmente con il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (o anche con $\sum a_n$ o $\sum_n a_n$ se non occorre specificare meglio); in altre parole si pone:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \{s_n\}\,, \quad \text{dove } s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,.$$

Def. Se la successione $\{s_n\}$ converge, diverge (positivamente o negativamente), è oscillante, diciamo rispettivamente che la serie **converge**, **diverge** (positivamente o negativamente), è **oscillante** (o **indeterminata**).
Se la successione $\{s_n\}$ non è oscillante, il limite di $\{s_n\}$ si chiama **somma** della serie di termini a_n e si indica anch'essa con il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (oppure $\sum a_n$,

$\sum_n a_n$); in altre parole si pone anche:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \, ,$$

quando il limite di $\{s_n\}$ esiste.

Studiare il *carattere* della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ significa stabilire se la serie è convergente, divergente o indeterminata.

Osservazione. In base a quanto precede, il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (o ciascuna delle sue varianti $\sum a_n$, $\sum_n a_n$) si usa con un doppio significato: esso indica sia la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, sia il suo limite $\lim_{n\to+\infty} s_n$ (se esiste).

La somma di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si può assumere come definizione di "somma degli infiniti termini a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)". Nel caso in cui la successione $\{a_n\}$ sia *definitivamente* nulla, ovvero se

$$\exists\, m \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq m \quad a_n = 0\,,$$

il valore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ coincide con l'usuale somma degli addendi a_0, a_1,...,a_{m-1}, cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n\,.$$

Si ha infatti che $\forall\, n \geq m-1$ la somma parziale $n-$ma $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ si riduce a

$$s_n = \sum_{k=0}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_k\,.$$

Quindi $\{s_n\}$ è definitivamente costante e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{n=0}^{m-1} a_n$$

(l'indice della sommatoria è muto).

Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, una relazione importante tra il termine $n-$mo a_n della serie e la somma parziale $n-$ma $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è data dalla seguente:

$$a_n = s_n - s_{n-1}\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

La precedente si ricava subito osservando che:

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_{n-1} + a_n - s_{n-1} = a_n$$

ESEMPI: 1) Se $a_n = 1\;\forall\, n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ è per definizione la successione $\{s_n\}$, dove:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Si calcola

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty\,.$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ è positivamente divergente e la sua somma è $+\infty$; in base a quanto detto prima, si scrive anche:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty\,.$$

2) Se $a_n = (-1)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è per definizione la successione $\{s_n\}$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ pari} \\ 0 \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

La successione $\{s_n\}$ è oscillante: quindi si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è oscillante o indeterminata.

3) Se $a_n = 2^{-n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ è per definizione la successione $\{s_n\}$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} =^{*} \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 2(1-2^{-(n+1)}) = 2-2^{-n}\,.$$

Si calcola:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}(2-2^{-n}) = 2\,.$$

Quindi la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ converge e la sua somma è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2$$

$*$ Si usa qui la formula di fattorizzazione

$$1-q^{n+1} = (1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1}+q^n)$$
$$= (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{con } q = 2^{-1}$$

4) La serie dell'esempio 3) è un caso particolare della *serie geometrica di ragione* $q \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$. Il carattere della serie dipende dalla ragione q, secondo lo schema sottostante:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} \text{ se } |q| < 1\,, \\ \\ \text{diverge positivamente se } q \geq 1\,, \\ \\ \text{oscilla (o è indeterminata) se } q \leq -1\,. \end{cases}$$

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Teorema. *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge allora* $\lim_n a_n = 0$.

dim. La convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ significa la convergenza della successione $\{s_n\}$ delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Sia $L \in \mathbb{R}$ il limite delle successione $\{s_n\}$ (cioè la somma della serie degli a_n). Allora, dato che $a_n = s_n - s_{n-1}$ si ha:

$$\lim_n a_n = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = L - L = 0\,.$$

Attenzione: La condizione $\lim_n a_n = 0$, necessaria per la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, NON è sufficiente.

La *serie armonica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, pur avendo che $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.