

SERIE NUMERICHE

Con l'introduzione delle serie, ci si propone di estendere l'operazione di somma ad un numero infinito di addendi.

Def. Data una successione $\{a_n\}$, si chiama **serie di termini** a_n la successione $\{s_n\}$ il cui termine n -mo s_n è definito come

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In maniera più esplicita, la successione $\{s_n\}$ è la funzione di \mathbb{N} in \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ 0 &\mapsto s_0 = a_0 \\ 1 &\mapsto s_1 = a_0 + a_1 \\ 2 &\mapsto s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \\ n &\mapsto s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\ &\dots \end{aligned}$$

- Il termine n -mo s_n della serie $\{s_n\}$ si chiama **somma parziale n -ma della serie** (o **ridotta n -ma della serie**)
- Data una successione $\{a_n\}$, la serie di termini a_n si indica abitualmente con il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (o anche con $\sum a_n$ o $\sum_n a_n$ se non occorre specificare meglio); in altre parole si pone:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \{s_n\}, \quad \text{dove } s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Def. Se la successione $\{s_n\}$ converge, diverge (positivamente o negativamente), è oscillante, diciamo rispettivamente che la serie **converge**, **diverge** (positivamente o negativamente), è **oscillante** (o **indeterminata**).

Se la successione $\{s_n\}$ non è oscillante, il limite di $\{s_n\}$ si chiama **somma** della serie di termini a_n e si indica anch'essa con il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (oppure $\sum a_n$,

$\sum_n a_n$); in altre parole si pone anche:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n,$$

quando il limite di $\{s_n\}$ esiste.

Studiare il *carattere* della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ significa stabilire se la serie è convergente, divergente o indeterminata.

Osservazione. In base a quanto precede, il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (o ciascuna delle sue varianti $\sum a_n$, $\sum_n a_n$) si usa con un doppio significato: esso indica sia la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, sia il suo limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ (se esiste).

La somma di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si può assumere come definizione di “somma degli infiniti termini a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)”. Nel caso in cui la successione $\{a_n\}$ sia

definitivamente nulla, ovvero se

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \quad a_n = 0,$$

il valore $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ coincide con l'usuale somma degli addendi a_0, a_1, \dots, a_{m-1} , cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n.$$

Si ha infatti che $\forall n \geq m - 1$ la somma parziale n -ma $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ si riduce a

$$s_n = \sum_{k=0}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

Quindi $\{s_n\}$ è definitivamente costante e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{n=0}^{m-1} a_n$$

(l'indice della sommatoria è mutuo).

Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, una relazione importante tra il termine n -mo a_n della serie e la somma parziale n -ma $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ è data dalla seguente:

$$a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

La precedente si ricava subito osservando che:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_{n-1} + a_n - s_{n-1} = a_n \end{aligned}$$

ESEMPI: 1) Se $a_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ è per definizione la successione $\{s_n\}$, dove:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si calcola

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty.$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ è positivamente divergente e la sua somma è $+\infty$; in base a quanto detto prima, si scrive anche:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

2) Se $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è per definizione la successione $\{s_n\}$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

La successione $\{s_n\}$ è oscillante: quindi si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è oscillante o indeterminata.

3) Se $a_n = 2^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ è per definizione la successione $\{s_n\}$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \stackrel{*}{=} \frac{1 - 2^{-(n+1)}}{1 - 2^{-1}} = 2(1 - 2^{-(n+1)}) = 2 - 2^{-n}.$$

Si calcola:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - 2^{-n}) = 2.$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ converge e la sua somma è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2$$

* Si usa qui la formula di fattorizzazione

$$\begin{aligned} 1 - q^{n+1} &= (1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k \quad \text{con } q = 2^{-1} \end{aligned}$$