Criterio del confronto per serie a termini positivi

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *successioni non negative, tali che* $a_n \leq b_n$, $\forall\, n$. *Allora:*

i) Se $\sum b_n$ *converge, allora* $\sum a_n$ *converge;*

ii) Se $\sum a_n$ *diverge, allora* $\sum b_n$ *diverge.*

Dim.

i) Poniamo $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $\forall\, n$. Poichè $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, $\forall\, n$, le successioni $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ sono non decrescenti. Inoltre

$$a_k \leq b_k\,, \quad \forall\, k \quad \Rightarrow \quad s_n \leq t_n\,,\ \forall\, n\,.$$

La convergenza della serie $\sum b_n$ significa che la successione $\{t_n\}$ è superiormente limitata (Teorema sulle successioni monotone). Allora

$$s_n \leq t_n \leq \sup_n t_n \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \{s_n\} \text{ superiorm. limitata} \\ \\ \text{e } \sup_n s_n \leq \sup_n t_n \end{array}$$

Il Teorema delle successioni monotone implica che la successione $\{s_n\}$ (cioè la serie $\sum a_n$) è convergente (con limite il $\sup_n s_n$) e vale:

$$\sum a_n = \sup_n s_n \leq \sup_n t_n = \sum b_n \,.$$

ii) Supponiamo ora che $\sum a_n$ sia divergente. Se $\sum b_n$ fosse convergente, per il punto i) (nel quale vanno invertiti i ruoli di $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$) si avrebbe che anche $\sum a_n$ deve convergere. Dunque $\sum b_n$ deve divergere.