Studi di funzione

1) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{x+2} e^{-(x+2)}$$
.

Per cominciare, osserviamo che f si ottiene traslando di 2, nella direzione negativa dell'asse x, la funzione

$$g(x) = \sqrt{x} e^{-x}$$

cioè abbiamo f(x) = g(x+2). Possiamo pertanto concentrarci sullo studio della funzione g, deducendo da esso il comportamento di f. Abbiamo:

$$\operatorname{dom} g = \{x \in \mathbb{R}: \ x \ge 0\} = [0, +\infty[$$

La funzione non è pari né dispari.

La funzione g è continua nel suo dominio. Calcoliamo il limite di g a $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0,$$

quindi y=0 è un asintoto orizzontale di g, a $+\infty$. Studiamo ora la derivabilità di g. In conseguenza dei Teoremi sul calcolo delle derivate, g è derivabile in $]0,+\infty[$ e la sua derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$$
.

Per quanto riguarda l'esistenza della derivata prima destra in x=0, abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Dunque $g'_{+}(0) = +\infty$.

Se ne conclude che g è derivabile in $]0, +\infty[$. Per quanto riguarda il segno di g', abbiamo:

$$g'(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \le \frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo che g è

- 1. crescente in $[0,\frac{1}{2}[$
- 2. decrescente in $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

In particolare, in $x=\frac{1}{2}\ g$ ha un punto di massimo assoluto.

Calcoliamo la derivata seconda di g e studiamone il segno, al fine di determinare gli intervalli di concavità/convessità di g. In $]0,+\infty[$, g' è derivabile e si calcola

$$g''(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{-2\sqrt{x} - (1 - 2x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} e^{-x} - \frac{1 - 2x}{\sqrt{x}} e^{-x} \right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x} \left[\frac{-4x - 1 + 2x}{2x^{3/2}} + \frac{2x - 1}{\sqrt{x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}\frac{2x(2x-1)-2x-1}{2x^{3/2}} = e^{-x}\frac{4x^2-4x-1}{4x^{3/2}}.$$

Abbiamo pertanto che

$$g''(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x - 1 \ge 0$$

Le soluzioni dell'equazione $4x^2 - 4x - 1 = 0$ sono

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \,,$$

da cui si deduce

$$4x^2 - 4x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \,.$$

Se ne deduce che la funzione g è

- 1. concava in $\left[0, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$;
- 2. convessa in $\left]\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$.

In $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, g ha un p.to di flesso (a tangente obliqua).

Tutto quanto ottenuto per g, può essere facilmente traspostato alla f. Ricordiamo che

$$f(x) = g(x+2).$$

Quindi $\operatorname{dom} f = [-2, +\infty[$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x+2) = \lim_{z \to +\infty} g(z) = 0.$$

Abbiamo che f derivabile in $]-2,+\infty[$ con

$$f'(x) = g'(x+2) = \frac{1 - 2(x+2)}{2\sqrt{x+2}}e^{-(x+2)}$$

e $f'_{+}(-2) = +\infty$. Per la derivata seconda di f si ha:

$$f''(x) = g''(x+2) = \frac{4(x+2)^2 - 4(x+2) - 1}{4(x+2)^{3/2}} e^{-(x+2)}$$
$$= \frac{4x^2 + 12x + 7}{4(x+2)^{3/2}} e^{-(x+2)}$$

Abbiamo che

1.
$$f$$
 è crescente in $[-2, -2 + \frac{1}{2}[=[-2, -\frac{3}{2}[$

2.
$$f$$
 è decrescente in $]-\frac{3}{2},+\infty[$.

In particolare, f ha un punto di massimo assoluto in $x=-\frac{3}{2}$. Inoltre:

- 1. f è concava in $\left[-2, -2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$;
- 2. f è convessa in $\left]-2+\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$.

In $x=-2+\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, f ha un punto di flesso (a tangente obliqua).

2) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \log(3 - e^x) + e^x.$$

Dominio di f ed eventuali simmetrie: Si ha

$$dom f = \{x \in \mathbb{R} : 3 - e^x > 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : e^x < 3\} =] - \infty, \log(3)[$$

La funzione f non è pari né dispari.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti: Si calcola

•
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log(3 - e^x) + e^x = \log(3)$$

 $\Rightarrow y = \log(3)$ asintoto orizzontale sinistro (a $-\infty$)

•
$$\lim_{x \to \log(3)^-} f(x) = \lim_{x \to \log(3)^-} \log(3 - e^x) + e^x = -\infty$$

 $\Rightarrow x = \log(3)$ asintoto verticale sinistro

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: f è derivabile nel suo dominio (cioè $\mathrm{dom}\,f'=\mathrm{dom}\,f$) e

$$f'(x) = \frac{-e^x}{3 - e^x} + e^x = e^x \left[-\frac{1}{3 - e^x} + 1 \right]$$
$$= e^x \frac{2 - e^x}{3 - e^x}.$$

Nel dominio di f' si ha:

$$f'(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - e^x \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \le \log(2)$$

quindi:

- 1. f crescente in $]-\infty, \log(2)];$
- 2. f decrescente in $[\log(2), \log(3)]$;
- 3. $x = \log(2)$ punto di massimo assoluto di f.

Derivata seconda di f e intervalli di concavità/convessità: f' è derivabile nel suo dominio e

$$f''(x) = e^{x} \frac{2 - e^{x}}{3 - e^{x}} + e^{x} \frac{-e^{x}(3 - e^{x}) - (2 - e^{x})(-e^{x})}{(3 - e^{x})^{2}}$$

$$= e^{x} \left[\frac{2 - e^{x}}{3 - e^{x}} - \frac{e^{x}}{(3 - e^{x})^{2}} \right] = e^{x} \frac{(2 - e^{x})(3 - e^{x}) - e^{x}}{(3 - e^{x})^{2}}$$

$$= e^{x} \frac{e^{2x} - 6e^{x} + 6}{(3 - e^{x})^{2}}.$$

Allora

$$f''(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 6e^x + 6 \ge 0.$$

Ponendo $t = e^x$ si ha

$$e^{2x} - 6e^x + 6 \ge 0 \iff t^2 - 6t + 6 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow t \leq 3 - \sqrt{3} \text{ oppure } t \geq 3 + \sqrt{3}$$

da cui

$$e^{2x}-6e^x+6\geq 0 \iff x\leq \log(3-\sqrt{3}) \text{ opp. } x\geq \log(3+\sqrt{3})$$

Quindi abbiamo

- a. f convessa in $]-\infty,\log(3-\sqrt{3})];$
- b. f concava in $[\log(3-\sqrt{3}),\log(3)[$;
- c. $x = \log(3 \sqrt{3})$ p.to di flesso di f, a tangente obliqua.

3) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right)$$
.

Dominio di f ed eventuali simmetrie: Si ha

$$dom f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} =] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

La funzione f non è pari né dispari.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti: Si calcola

•
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right) = -\arctan(5)$$

 $\Rightarrow y = -\arctan(5)$ asintoto orizzontale sinistro

•
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

•
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{4} \text{ as into to orizzontale destro}$$

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: f è derivabile nel suo dominio $(\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f)$ e si calcola

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right)^2} \frac{e^x (e^x - 1) - (e^x + 5)e^x}{(e^x - 1)^2}$$
$$= -\frac{6e^x}{(e^x - 1)^2 + (e^x + 5)^2}.$$

Quindi si ha:

 $f'(x) < 0 \implies f$ strett. decrescente nel suo dominio .

Derivata seconda di f e intervalli di concavità/convessità:

f' è derivabile nel suo dominio e si calcola:

$$f''(x) =$$

$$-6e^{x} \frac{\left[(e^{x}-1)^{2}+(e^{x}+5)^{2}\right]-2\left[(e^{x}-1)e^{x}+(e^{x}+5)e^{x}\right]}{\left[(e^{x}-1)^{2}+(e^{x}+5)^{2}\right]^{2}}$$

$$= 12 e^{x} \frac{e^{2x} - 13}{[(e^{x} - 1)^{2} + (e^{x} + 5)^{2}]^{2}}.$$

Allora

$$f''(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 13 \ge 0$$
.

Ponendo $t=e^x$ si ha

$$e^{2x} - 13 \ge 0 \iff t^2 - 13 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow t \leq -\sqrt{13} \text{ oppure } t \geq \sqrt{13}$$

da cui

$$e^{2x} - 13 \ge 0 \iff e^x \le -\sqrt{13} \text{ oppure } e^x \ge \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow x \ge \log(\sqrt{13})$$

Quindi abbiamo

- a. f concava in $]-\infty,0[\,\cup\,]0,\log(\sqrt{13})];$
- b. f convessa in $[\log(\sqrt{13}), +\infty[$;
- c. $x = \log(\sqrt{13})$ p.to di flesso di f, a tangente obliqua.

4) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{\pi}{2} - 2 & \text{se } x < -2 & (1) \\ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ -x & \text{se } x > 2 & (3) \end{cases}$$
 (2)

Osservazione: Se la funzione è assegnata a tratti, ciascuna espressione analitica che la funzione può assumere va considerata <u>limitatamente</u> all'intervallo su cui essa è assegnata come valore della funzione.

Dominio di f ed eventuali simmetrie: verifichiamo se ciascuna delle tre espressioni analitiche che f può assumere è ben definita sull'intervallo corrispondente. Le espressioni (1) e (3) sono evidentemente ben definite su tutto \mathbb{R} .

Per quanto riguarda la (2), si ha che $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ è ben definito quando l'argomento della funzione \arcsin , cioè $\frac{x}{2}$, è compreso tra -1 e +1, ovvero quando $x \in [-2,2]$.

Quest'ultimo è esattamente l'intervallo reale sul quale (3) è assegnata come espressione di f. Se ne conclude che

$$dom f = \mathbb{R}.$$

La funzione f non è pari né dispari.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti: I limiti da calcolare sono a $\pm \infty$. Troviamo

•
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x - \frac{\pi}{2} - 2 = +\infty.$$

Vediamo se f ammette un asintoto obliquo sinistro. A questo scopo, calcoliamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - \frac{\pi}{2} - 2}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = -\frac{\pi}{2} - 2.$$

Abbiamo allora che la retta $y=-x-\frac{\pi}{2}-2$ è asintoto obliquo sinistro per f.

Analogamente, si trova che

•
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$
.

e y = -x è asintoto obliquo destro per f.

Quando, come nel caso in esame, la funzione è assegnata a tratti, è anche utile trovare gli eventuali punti di discontinuità, determinandone la tipologia. All'interno degli intervalli su cui f assume espressioni distinte, f è continua (in quanto le espressioni (1), (2), (3) definiscono funzioni continue sugli intervalli corrispondenti). Occorre verificare direttamente la continuità nei punti ± 2 (p.ti di accumulazione di $\operatorname{dom} f$).

Si calcola:

$$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) = \lim_{x \to -2^{-}} -x - \frac{\pi}{2} - 2 = -\frac{\pi}{2} = f(-2)$$

$$\lim_{x \to -2^{+}} f(x) = \lim_{x \to -2^{-}} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} = f(-2)$$

Quindi f è continua in x = -2.

Si calcola anche:

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} -x = -2$$

da cui segue che 2 è p.to di discontinuità a salto di f.

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: Usando i teoremi sul calcolo delle derivate, si trova che f è derivabile in $]-\infty,-2[$,]-2,2[, $]2,+\infty[$, con

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -2 \text{ opp. } x > 2 \\ \\ \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} & \text{se } -2 < x < 2 \,. \end{cases}$$

f non è derivabile in 2, perchè è discontinua. Per verificare la derivabilità in -2, calcoliamo

$$\lim_{x \to -2^{-}} f'(x) = -1 \text{ e } \lim_{x \to -2^{+}} f'(x) = \lim_{x \to -2^{+}} \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^{2}}{4}}} = +\infty$$

da cui discende che -2 è un p.to angoloso di f.

Per quanto riguarda la monotonia di f, dal calcolo di f' segue subito che:

- 1. f è descrescente in $]-\infty,-2[$ e in $]2,+\infty[$;
- 2. f è crescente in]-2,2[;
- 3. x=-2: p.to di min. rel. (non ass., perchè f non inf. limitata)
- 4. x=2: p.to di max. rel. (non ass., perchè f non sup. limitata)

Derivata seconda di f e intervalli di concavità/convessità: si calcola:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{se } x < -2 \text{ opp. } x > 2 \\ \\ \frac{1}{8} x \, \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} & \text{se } -2 < x < 2 \,. \end{cases}$$

Se ne deduce facilmente che

$$f''(x) \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow f \text{ concava in }]-2,0], \\ > 0 \Rightarrow f \text{ convessa in }]0,2[.$$

In particolare, f ha in 0 un p.to di flesso a tangente obliqua.

In $]-\infty,-2[$ e $]2,+\infty[$ (dove f''(x)=0), f è banalmente sia concava che convessa.