NOTA: le definizioni di limite ora date si possono riassumere con il linguaggio degli intorni: siano $L, x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$; allora

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \text{ intorno } I \text{ di } L \text{ esiste un intorno } J \text{ di } x_0 \text{ tale che se } x_0 \neq x \in J, \text{ allora } f(x) \in I.}$$

LIMITI DI FUNZIONI CON *dom* $f \subset \mathbf{R}$

Def. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$; diremo che $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ è un punto *di accumulazione* per A se per ogni intorno I di x_0 si ha $I \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Un punto di A che non sia un punto di accumulazione per A si dice un *punto isolato* di A.

$x_0 \in A$ è isolato $\iff \exists\, I$ intorno di x_0 t.c. $I \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$

$(I \cap A = \{x_0\})$

ESEMPI: 1) $A = \{(1/n) : n \in \mathbf{N},\ n \neq 0\}$. 0 è l'unico punto di accumulazione per A. Inoltre A è composto solo di punti isolati.

2) I punti di accumulazione per $\mathbf{Z}$ sono $+\infty$ e $-\infty$. Naturalmente, anche $\mathbf{Z}$ è composto solo di punti isolati.

Def. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ e x_0 di accumulazione per A. Allora diciamo che $f(x)$ tende a $L \in [-\infty, +\infty]$ per $x \to x_0$ (e scriviamo ancora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$) se per ogni intorno J di L esiste un intorno I di x_0 tale che se $x_0 \neq x \in I \cap A$, allora $f(x) \in J$.

N.B. Poiché x_0 è di accumulazione per A

$I \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, $\forall\, I$ intorno di x_0.

NOTA: questa definizione può venire riscritta con la terminologia degli ε e δ, distinguendo i vari casi. Per esempio se $x_0, L \in \mathbf{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa che

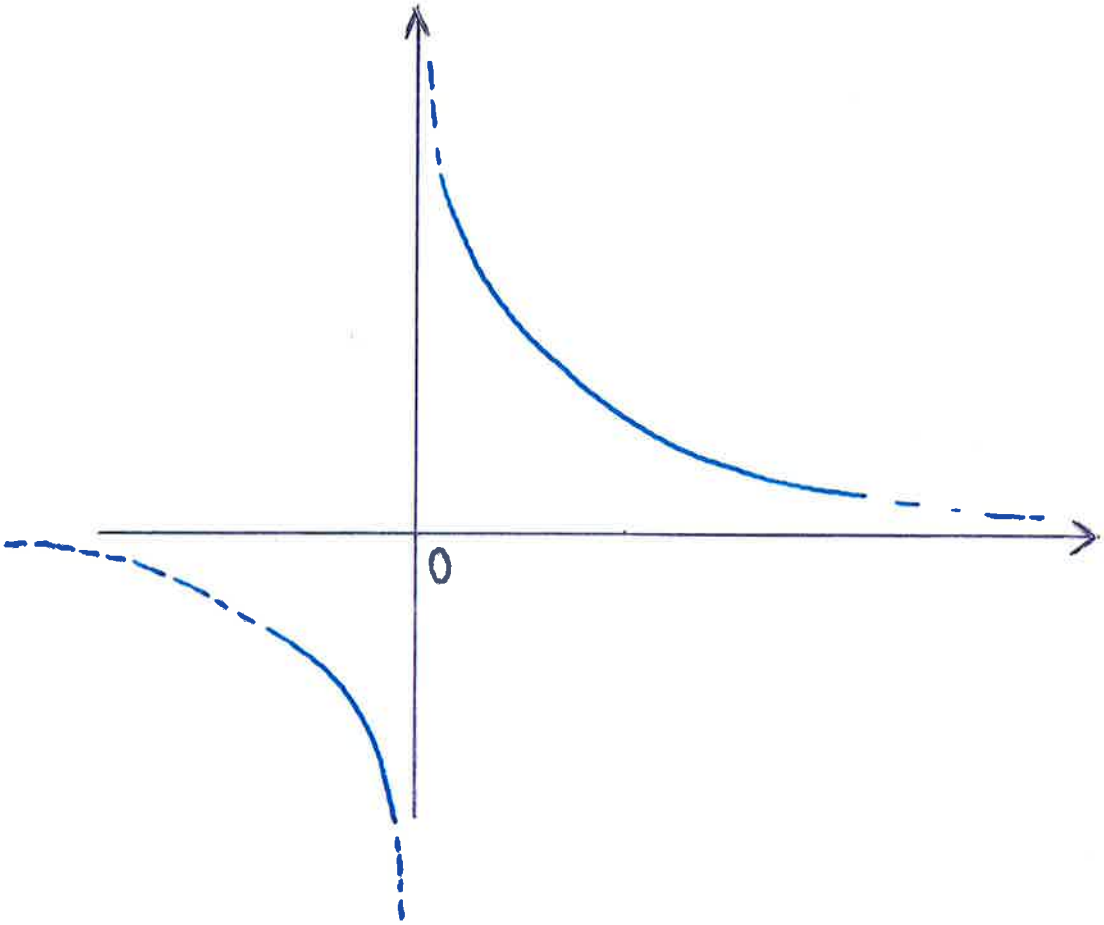
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \neq x_0 :\ x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta$, si ha $|f(x) - L| \leq \varepsilon$

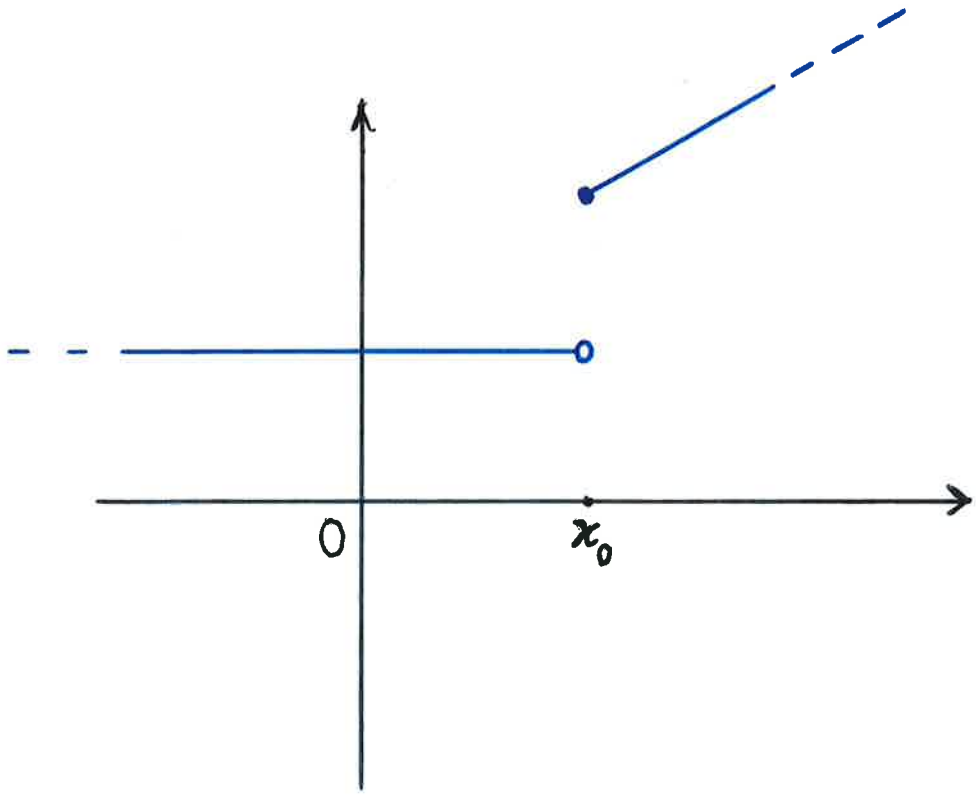
(PER ESERCIZIO: riscrivere i vari casi).

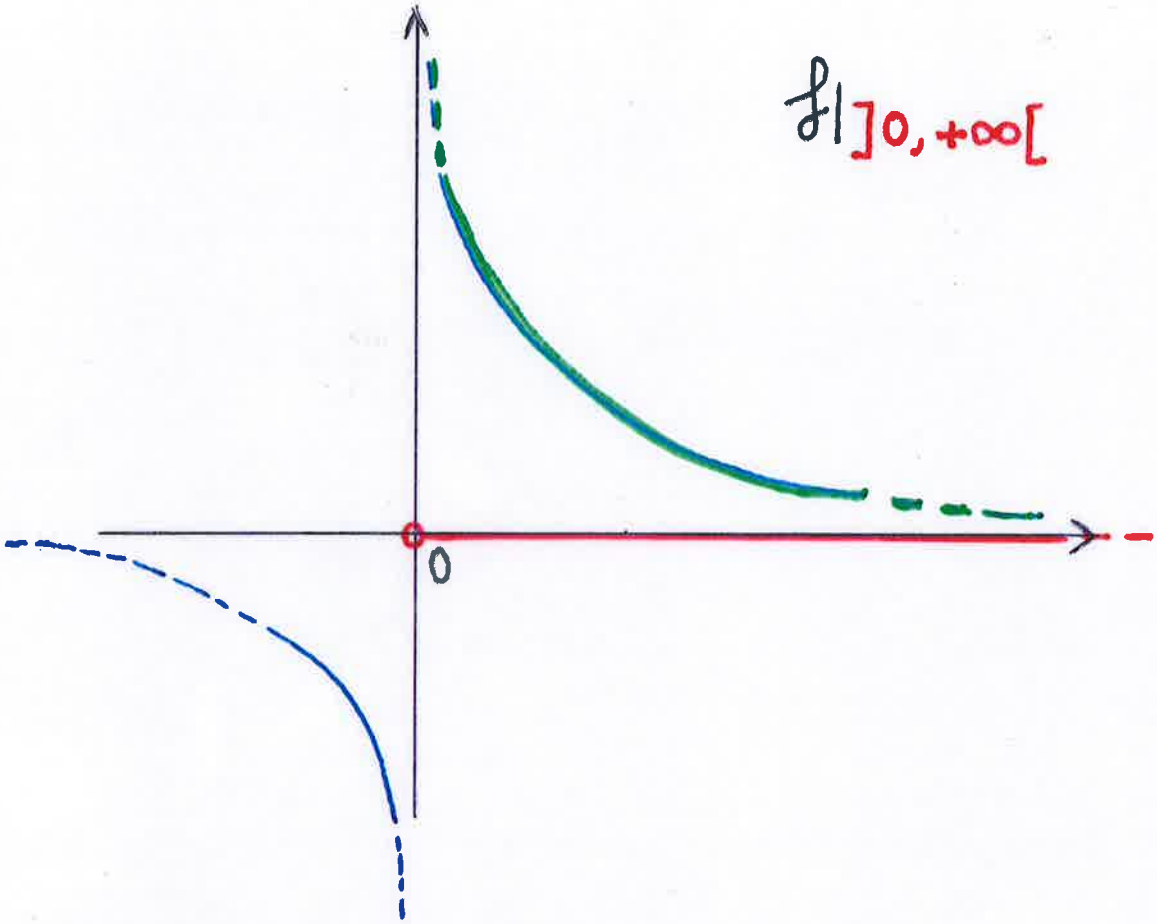
ESEMPI: 1) ogni successione è una funzione con dominio $\mathbf{N}$, e quindi $+\infty$ è l'unico punto per cui si possa applicare questa definizione (che naturalmente coincide con la solita definizione di limite di una successione).
2) $A = \{(1/n) :\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 0\}$, $f : A \to \mathbf{R}$ sia data da $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \in A$. Allora si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = e$. limite notevole

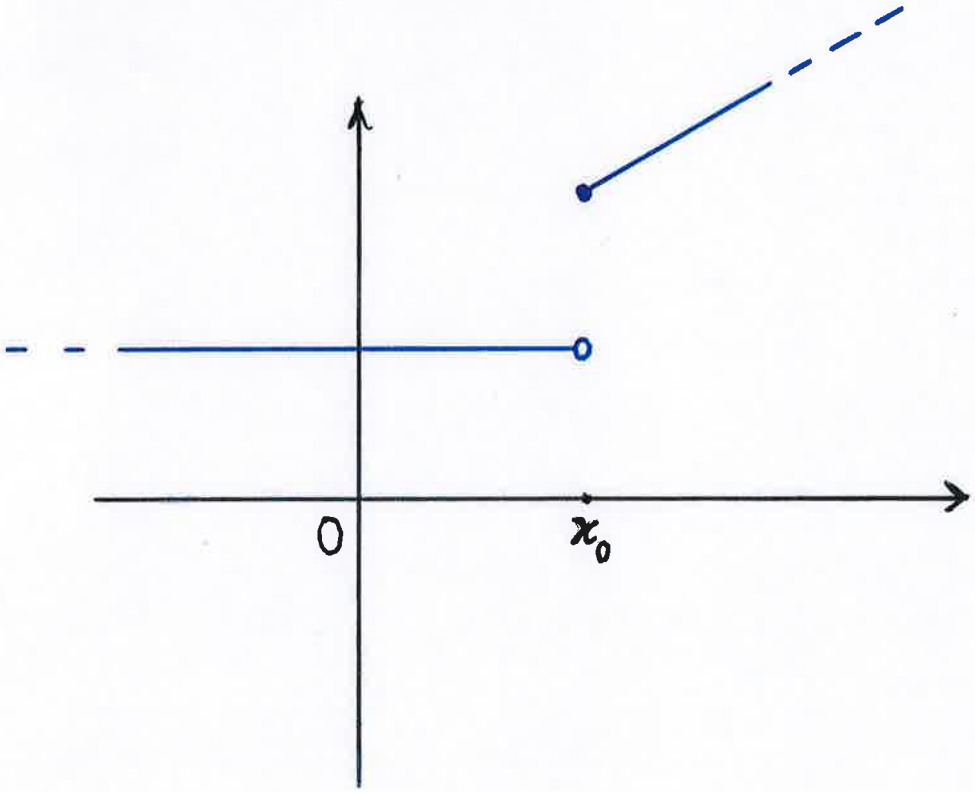
Teorema. (UNICITÀ) *Sia x_0 di accumulazione per $dom f$. Se $f(x) \to L$ e $f(x) \to L'$ per $x \to x_0$, allora $L = L'$*

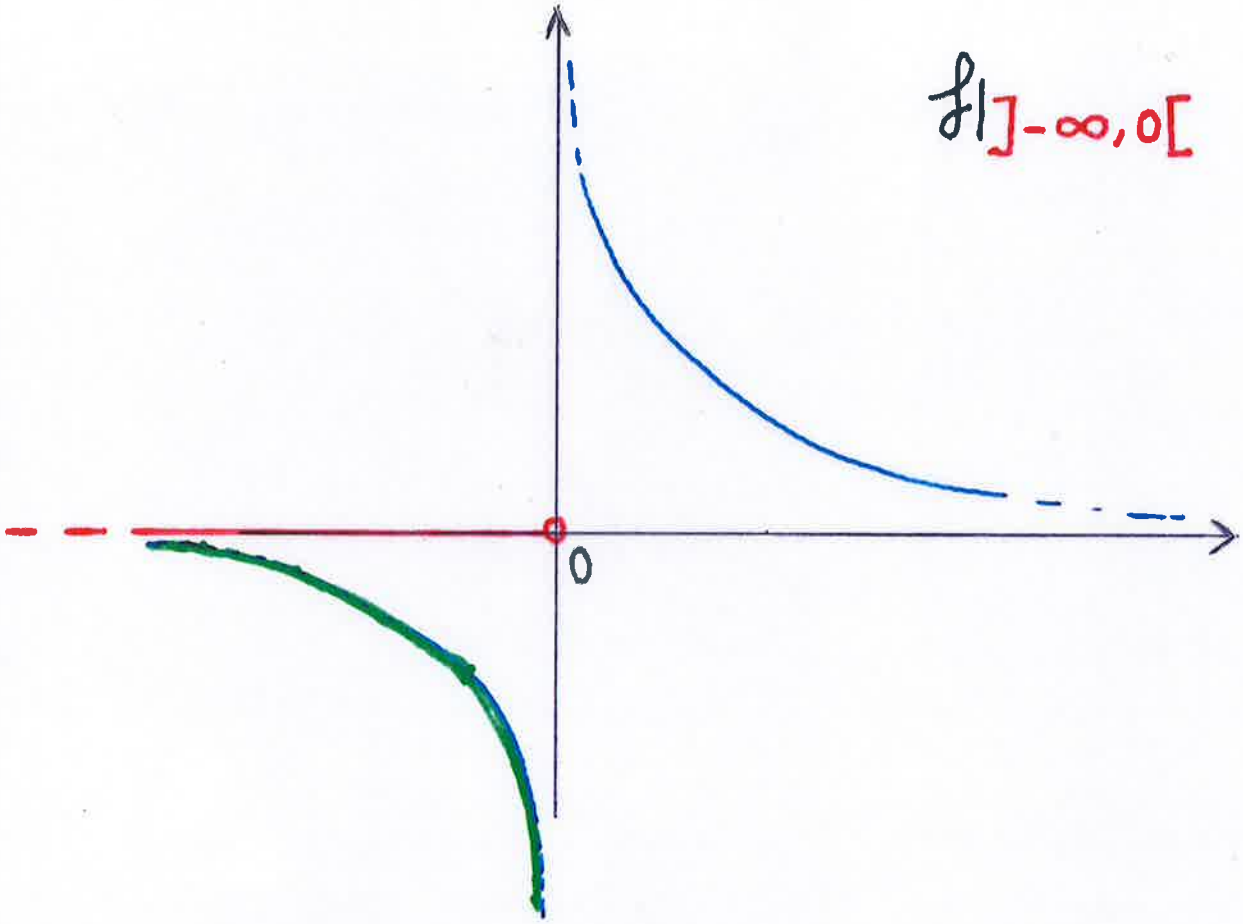
Dim. (supponiamo x_0, L e L' numeri reali) Supponiamo $L \neq L'$. Sia $\dfrac{|L - L'|}{2} > \varepsilon > 0$. Allora $\exists\ \delta > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$, ed esiste $\delta' > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta' \Longrightarrow |f(x) - L'| \leq \varepsilon$. Quindi $x \neq x_0$ e $|x_0 - x| \leq \min\{\delta, \delta'\}$ si ha $|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|$. Assurdo. $\square$

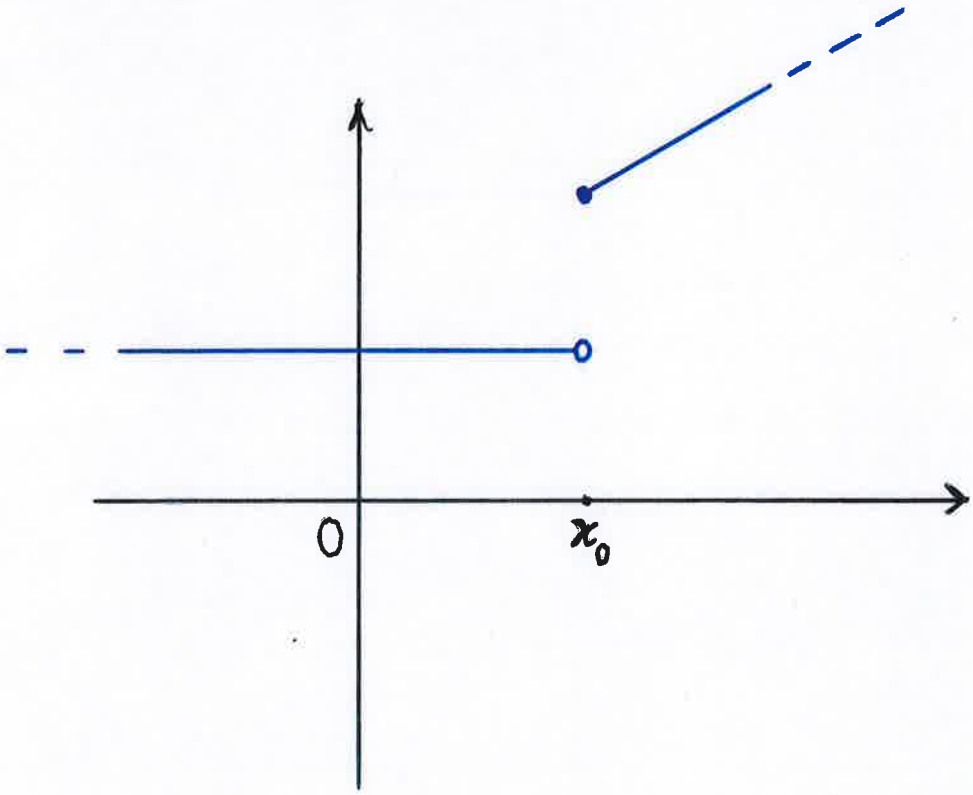

0


0
x_0


$f|_{]0,+\infty[}$
0


0
x_0


$f|_{]-\infty,0[}$
0


0
x_0

PER ESERCIZIO: dimostrare il teorema negli altri casi, anche usando la definizione mediante intorni.

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

Def. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per l'insieme $A \cap]x_0, +\infty[$. Se esiste il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $A \cap]x_0, +\infty[$, allora chiamiamo tale valore il *limite destro* di f in x_0, e lo denoteremo con il simbolo

$$\lim_{x \to x_0+} f(x).$$

NOTA: questa definizione può venire riscritta con il solito linguaggio degli intorni, con l'attenzione di prendere intorni "destri" di x_0 (ovvero insiemi del tipo $I \cap]x_0, +\infty[$ con I intorno di x_0). Equivalentemente (per esempio per $L \in \mathbf{R}$), possiamo dire che $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$ $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$: $x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap dom f$ si ha $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Def. Allo stesso modo si definisce il *limite sinistro* di f in x_0, che si denota con $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ prendendo la restrizione di f a $dom f \cap]-\infty, x_0[$.

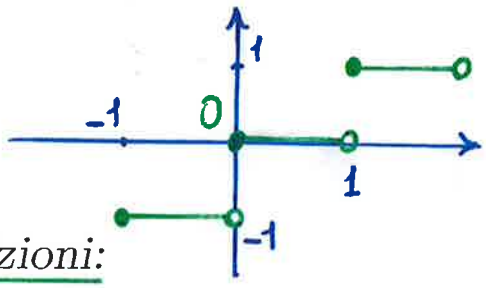
Def. $\forall x \in \mathbf{R}$ poniamo $[x] = \max\{k \in \mathbf{Z} : k \leq x\}$ (*parte intera* di x).

NOTE: 1) $n = [x] \Longleftrightarrow n \in \mathbf{Z}$ e $n \leq x < n+1$.

2) Esempi: $[1] = 1$, $[-2] = -2$, $[-3/2] = -2$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$.

ESEMPIO: la funzione parte intera non ammette limite per $x \to 0$, però si ha

$$\lim_{x \to 0-} [x] = -1 \qquad \lim_{x \to 0+} [x] = 0.$$



Proposizione. *Sono equivalenti le condizioni:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

ii) $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$.

Dim. i) $\Longrightarrow$ ii): fissato ε (oppure M se il limite è $\pm\infty$) il δ che va bene per la def. di limite va bene anche per i limiti destro e sinistro;

ii) $\Longrightarrow$ i): fissato ε (oppure M...) si trova δ' (risp. δ'') tale che se $x \in]x_0 - \delta', x_0[\cap dom f$ (risp. se $x \in]x_0, x_0 + \delta''[\cap dom f$ allora $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ (risp. $f(x) \geq M$...). Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ questo va bene nella def. di limite. $\square$