Una stima migliore è la seguente

$$2.71 < e < 2.72$$

SOTTOSUCCESSIONI

Def. $\{b_n\}$ è *sottosuccessione* di $\{a_n\}$ se $\exists\ f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$(\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) < f(k+1))$

$$b_k = a_{f(k)}.$$

$b : \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$

$k \longmapsto f(k) \longmapsto a_{f(k)} = b_k$

In genere si scrive n_k invece di $f(k)$, per cui

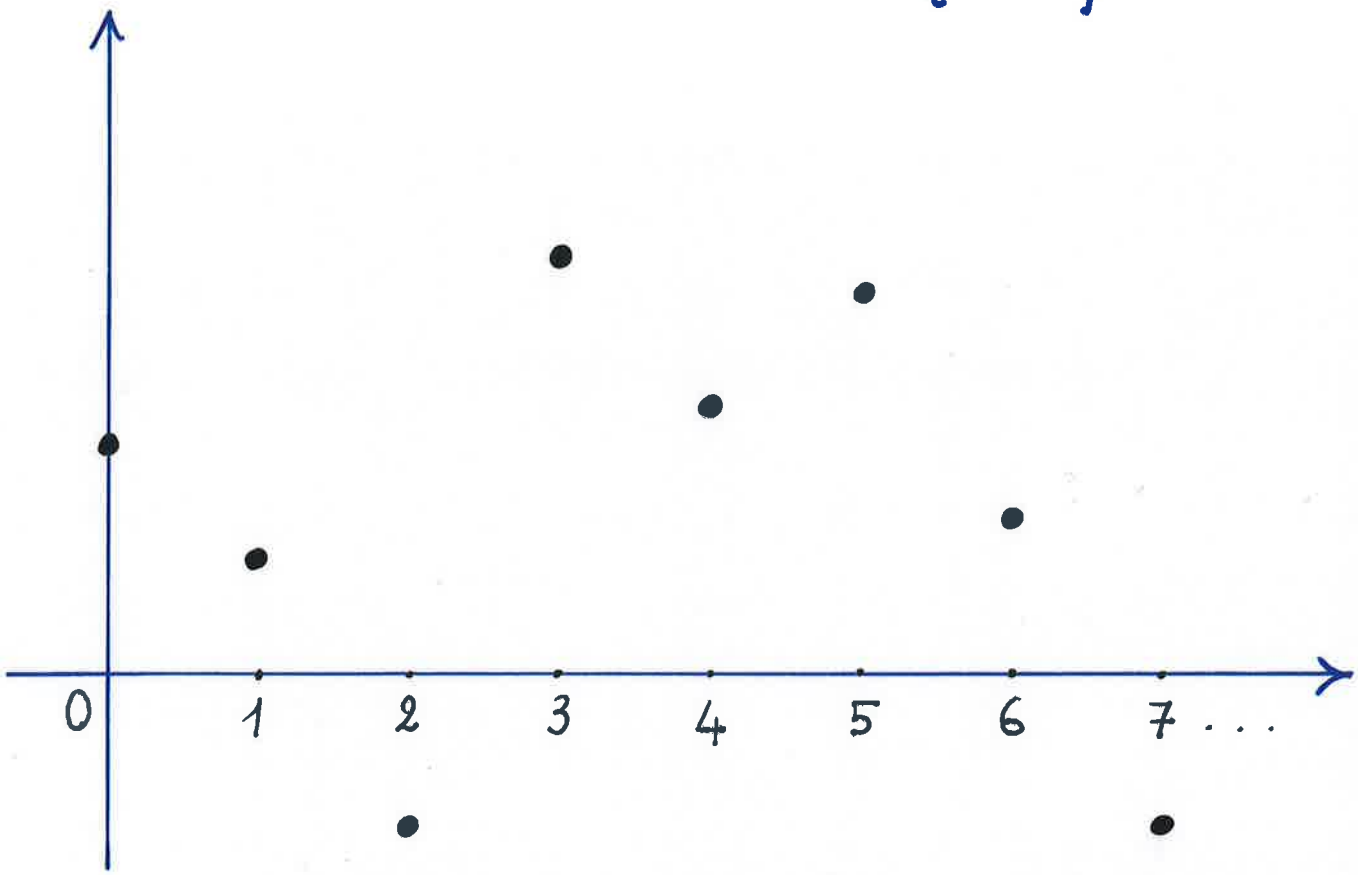
$$b_k = a_{n_k}.$$

NOTA: si ha $\lim_k f(k) = +\infty$.

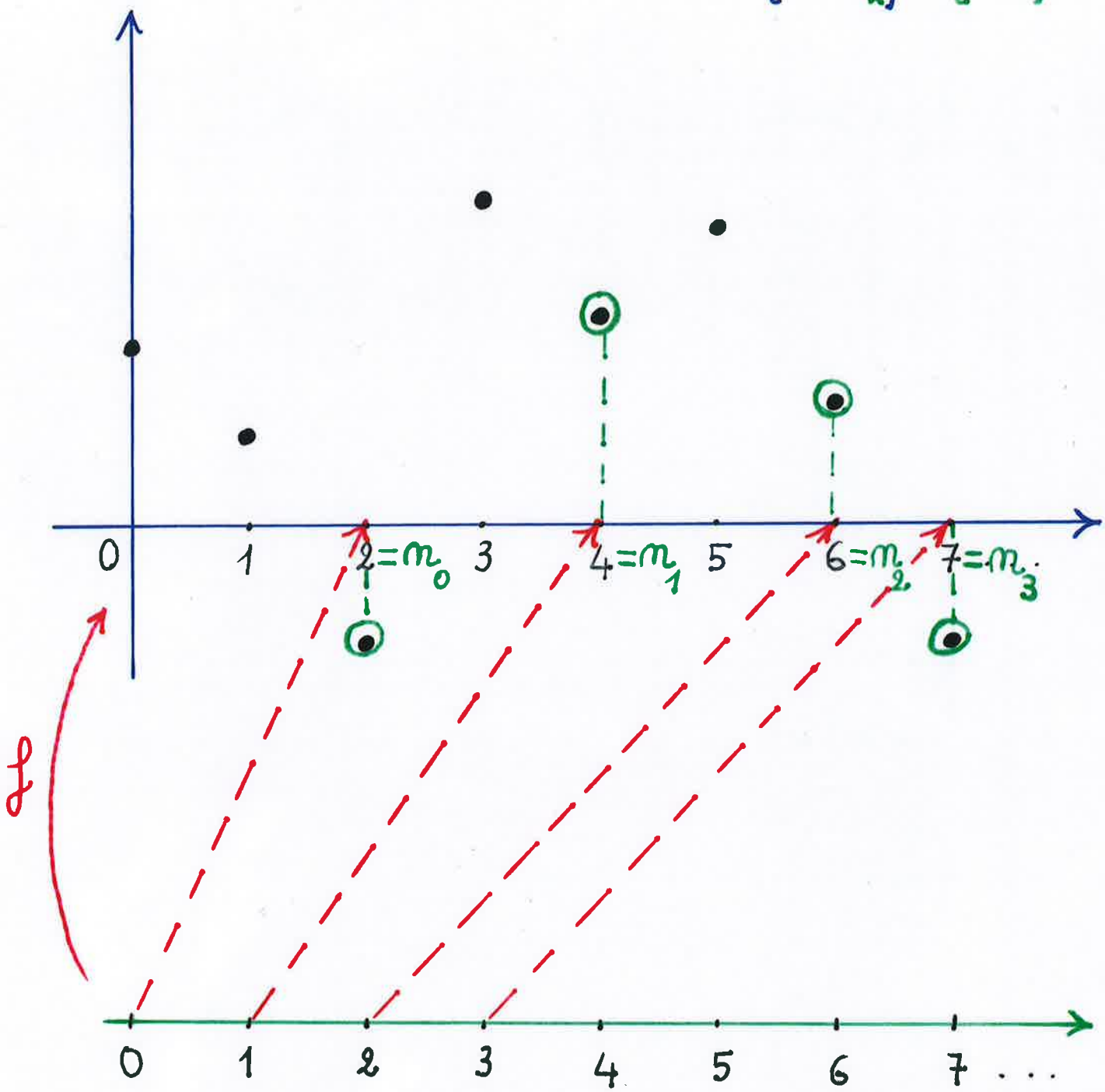
ESEMPI: $\{4n^2\}$ è sottosuccessione della successione $\{n^2\}$ (prendendo $f(n) = 2n$); $a_n = n^2$, $f(k) = n_k = 2k$ $\Rightarrow a_{n_k} = (2k)^2 = 4k^2$

La successione costante $\{1\}$ è sottosuccessione della successione $\{(-1)^n\}$ (prendendo $f(n) = 2n$, ma anche $f(n) = 6n$). $a_n = (-1)^n$, $f(k) = n_k = 2k$ $\Rightarrow a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$

SUCCESSIONE $\{a_n\}$

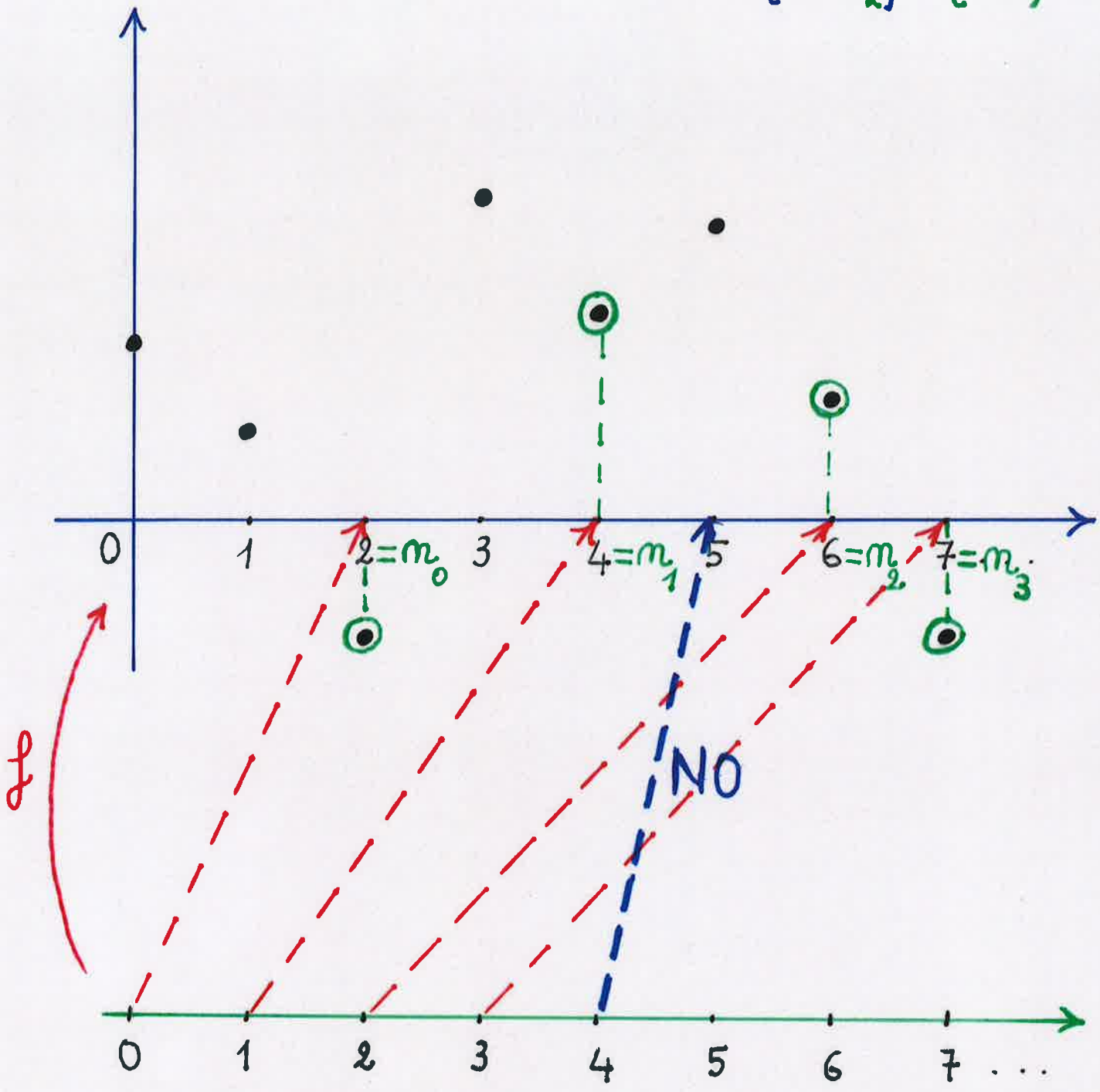


SOTTO SUCCESSIONE $\{a_{n_k}\} = \{b_k\}$



$f(k) = n_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

SOTTO SUCCESSIONE $\{a_{n_k}\} = \{b_k\}$



$f(k) = n_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(k) = n_k < f(k+1) = n_{k+1}}$$

$\{a_n\}$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad \ldots$

$\{a_{m_k}\}$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad \ldots$

$f(k) = m_k = k^2$

$\{a_{m_k}\}$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad \ldots$

$f(k) = m_k = 2k$

$\{a_{n_k}\}$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad \ldots$

$f(k) = n_k = 2k+1$

Teorema. $a_n \to L \Longrightarrow a_{n_k} \to L$ $\forall$ *sottosuccessione* $\{a_{n_k}\}$ *di* $\{a_n\}$.

Dim. Sia I intorno di L e m_0 t.c. $\forall n \geq m_0$ si ha $a_n \in I$. Dato che $\lim_k n_k = +\infty$, $\exists m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall k \geq m$ si ha $n_k \geq m_0$. Allora

$$a_{n_k} \in I \quad \forall k \geq m. \qquad \square$$

Corollario Importante. Se $\exists$ $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

ESEMPIO: $\{(-1)^n\}$ oscilla: infatti $(-1)^{2n} = 1 \to 1$, e $(-1)^{2n+1} = -1 \to -1 \neq 1$.

Teorema. (BOLZANO-WEIERSTRASS) *Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dim. $\{a_n\}$ limitata $\Longleftrightarrow \exists M > 0 : \ |a_n| < M \ \forall n \Longleftrightarrow \exists M > 0 : \ -M < a_n < M \ \forall n$.

Dobbiamo costruire una successione crescente di interi $\{n_k\}$. Poniamo $n_0 = 0$. Costruiamo per induzione n_k.

Illustriamo la costruzione di n_1. Poniamo $I_0 = [b_0, c_0] = [-M, M]$, e dividiamo I_0 nei due intervalli $[-M, 0]$ e $[0, M]$. In almeno uno di questi due intervalli devono cadere termini della successione a_j per infiniti indici j. Scegliamo $I_1 = [b_1, c_1]$ con questa proprietà e poniamo

$$n_1 = \min\{j : a_j \in I_1, j > 0\}.$$

Nel caso generale si procede allo stesso modo: definiti $I_k = [b_k, c_k]$ e n_k tali che $a_{n_k} \in I_k$ e in I_k cadono termini a_j per infiniti indici j, si divide a metà l'intervallo I_k in due intervalli della stessa ampiezza e si sceglie $I_{k+1} = [b_{k+1}, c_{k+1}]$ uno dei due intervalli in cui cadono termini a_j per infiniti indici j. Quindi si pone

$$n_{k+1} = \min\{j : \ a_j \in I_{k+1}, \ j > n_k\}.$$

È chiaro che la successione n_k è strettamente crescente e dunque $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$. Per costruzione abbiamo

$$-M \leq \ldots \leq b_{k-1} \leq \underline{b_k \leq a_{n_k} \leq c_k} \leq c_{k-1} \leq \ldots \leq M.$$

Dalla monotonia e dalla limitatezza segue che le successioni b_k, c_k sono convergenti. Poiché $|c_k - b_k| = M2^{-k+1}$, esse convergono allo stesso limite L. Infine da $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k$, segue che anche $a_{n_k} \to L$. $\square$

IL CRITERIO DI CAUCHY

OSSERVAZIONE: Sia $\{a_n\}$ una successione convergente a L. Valutiamo la differenza

$$|a_n - a_{n'}| = |a_n - L + L - a_{n'}| \leq |a_n - L| + |L - a_{n'}|.$$

Per ipotesi $\{a_n\}$ converge, ossia
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n, n' \geq m \quad |a_n - L| \leq \varepsilon$ e $|a_{n'} - L| \leq \varepsilon$. Segue allora che

$$|a_n - a_{n'}| \leq 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si può concludere che, per le successioni convergenti vale la seguente CONDIZIONE di CAUCHY.

Def. La successione $\{a_n\}$ è *di Cauchy* se
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N} : \forall n, n' \geq m \quad |a_n - a_{n'}| \leq \varepsilon \qquad (*)$.

NEGAZIONE DI (*): $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n, n' \geq m,\ |a_n - a_{n'}| > \varepsilon_0$

ESEMPIO: le successioni $\{(-1)^n\}$ e $\{n^2\}$ **non** sono di Cauchy. $\exists \varepsilon_0 = 1 : \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n, n' \geq m$ e $|(-1)^n - (-1)^{n'}| \geq 1$

$\forall m \in \mathbb{N}$ scelgo $n = m$ e $n' = m+1$: $|(-1)^m - (-1)^{m+1}| = 2 > 1$

Abbiamo dimostrato sopra che la condizione di Cauchy è condizione **NECESSARIA** affinchè una successione sia convergente, cioè

$$\boxed{a_n \to L \quad \Longrightarrow \text{vale} \quad (*).}$$

Vale il viceversa? SI

Teorema (**Criterio di Cauchy**). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione reale converga è che essa sia di Cauchy.*

Dim. (*Condizione sufficiente*) Sia $\{a_n\}$ di Cauchy. Dobbiamo mostrare che $\{a_n\}$ è convergente. Dividiamo la dimostrazione in passi successivi.

1° passo. Ogni successione $\{a_n\}$ di Cauchy è limitata.

Per provarlo scegliamo nella definizione $\varepsilon = 1$; allora $\exists\ m$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|a_n - a_m| \leq 1$. Da questo segue $|a_n| \leq |a_m| + 1\ \forall n \geq m$. Dunque

$$|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m-1}|, |a_m| + 1\} \qquad \forall n \geq 0$$

e perciò la successione è limitata.

2° passo. Poichè $\{a_n\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, se ne può estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $a_{n_k} \to L \in \mathbf{R}$.

3° passo. Se $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente $a_{n_k} \to L$ allora anche $a_n \to L$.

Fissato $\varepsilon > 0$ sia N t.c. $\forall\, k \geq N$ sia $|L - a_{n_k}| \leq \varepsilon$ e anche, usando la definizione di successione di Cauchy, tale che n_N sia così grande che $\forall\ n \geq n_N$ si abbia $|a_{n_N} - a_n| \leq \varepsilon$. Allora $\forall n \geq n_N$ si ha

$$|a_n - L| \leq |a_{n_N} - a_n| + |L - a_{n_N}| \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

OSSERVAZIONE: La sufficienza della condizione di Cauchy per la convergenza di una successione è equivalente alla completezza. in $\mathbb{R}$.

1. ESEMPIO. Sia $\{x_n\} \subset \mathbf{Q}$ una successione convergente a $\sqrt{2}$. Poiché la successione è convergente in $\mathbf{R}$, essa è di Cauchy in $\mathbf{R}$ (e dunque anche in $\mathbf{Q}$). Però non è convergente in $\mathbf{Q}$.

2. $\{a_n\}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \geq 1$, è di Cauchy in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{Q}$). Ma converge ad $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Insiemi densi e successioni

Gli insiemi $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sono *densi* in $\mathbf{R}$; ovvero: se $x < y$, allora gli insiemi

$$\{z \in \mathbf{Q} \ : \ x < z < y\} \ e \ \{z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \ : \ x < z < y\}$$

sono infiniti. Ne consegue che dato un qualsiasi $x \in \mathbf{Q}$ esistono successioni $\{x_n\} \subset \mathbf{Q}$ e $\{y_n\} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tali che

$$x_n \to x, \qquad y_n \to x.$$

Analogamente, dato un qualsiasi $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ esistono successioni $\{x'_n\} \subset \mathbf{Q}$ e $\{y'_n\} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tali che

$$x'_n \to y, \qquad y'_n \to y.$$