SUCCESSIONI E RELAZIONE D'ORDINE

Teorema. (PERMANENZA DEL SEGNO) *Sia* $\{a_n\}$ *una successione tale che* $a_n \to L \in]0, +\infty]$ *(risp.* $a_n \to L \in [-\infty, 0[$*). Allora* $\exists m \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m \quad a_n > 0$ *(risp.* $a_n < 0$*).*

Dim. Consideriamo il caso $L > 0$ (il caso $L < 0$ è analogo e i casi $L = \pm\infty$ seguono subito dalla definizione). Per definizione di limite si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbf{N} : \quad \forall n \geq m \quad L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon.$$

Scelgliendo $\varepsilon = \frac{L}{2}$, si ha

$$a_n \geq L - \varepsilon = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0, \quad \forall n \geq m.$$

□

Teorema. (CONFRONTO) *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni convergenti o divergenti a* $\pm\infty$*.*
Se $\exists m_0 : \ \forall n \geq m_0$ *si ha* $a_n \leq b_n$*, allora*

$$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n.$$

In particolare:

Se $\exists m_0 : \forall n \geq m_0 \quad a_n \leq 0$ allora $\lim_n a_n \leq 0$

$a_n \geq 0$ allora $\lim_n a_n \geq 0$

Dim. Se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = +\infty$ la tesi diventa $+\infty \leq +\infty$ (che è vera). Analogamente se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = -\infty$. Altrimenti, consideriamo la successione $\{b_n - a_n\}$. Si ha $b_n - a_n \geq 0$, ed esiste

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n.$$

PROPRIETÀ DEI LIMITI (NON È F.I. $\pm\infty \mp \infty$)

Quest'ultima differenza deve essere non negativa, altrimenti per il teorema di permanenza del segno dovrebbe essere $b_n - a_n < 0$ da un certo m in poi. □

Teorema. (DEI DUE CARABINIERI) *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che*

1. $\lim_n b_n = \lim_n a_n = L$

Se $\{c_n\}$ è una terza successione tale che $\exists m \in \mathbb{N}$:

2. $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq m$

allora $\lim_n c_n = L$.

Dim. $\forall n$ si ha

$x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \quad (x = b_n - L)$

$$c_n - L \leq b_n - L \leq |b_n - L| \leq \underbrace{|a_n - L|}_{\geq 0} + |b_n - L|$$

e

$x \geq -|x| \quad (x = a_n - L)$

$$c_n - L \geq a_n - L \geq -|a_n - L| \geq -|a_n - L| \underbrace{- |b_n - L|}_{\leq 0}.$$

Perciò

$$\boxed{|c_n - L| \leq |a_n - L| + |b_n - L|.}$$

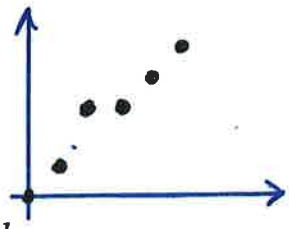
□

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists m, m' \in \mathbb{N}$ tali che

$|a_n - L| \leq \varepsilon/2 \ \forall n \geq m$ e $|b_n - L| \leq \varepsilon/2 \ \forall n \geq m'$

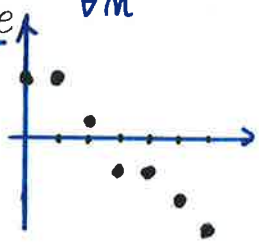
$\Longrightarrow |c_n - L| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{m, m'\}$

SUCCESSIONI MONOTONE



Def. Una successione $\{a_n\}$ si dice *monotona non decrescente* $\iff a_n \leq a_{n+1}\ \forall\, n$; strettamente crescente: $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$

una successione $\{a_n\}$ si dice *monotona non crescente* $\iff a_n \geq a_{n+1}\ \forall\, n$. strettam. decrescente: $a_n > a_{n+1}$, $\forall n$.



NOTA: $\{a_n\}$ monotona non decrescente $\Longrightarrow$

$a_n \geq a_0\ \forall\, n \Longrightarrow \{a_n\}$ inf. limitata

(analogamente $\{a_n\}$ monotona non crescente $\Longrightarrow$

$\{a_n\}$ sup. limitata).

Teorema. *Sia $\{a_n\}$ monotona non decrescente allora $\{a_n\}$ non oscilla e*

$\lim_n a_n = \sup_n a_n$; $\left(\sup_n a_n := \sup\{a_n;\ \forall n \in \mathbb{N}\}\right)$

sia $\{a_n\}$ monotona non crescente allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$\lim_n a_n = \inf_n a_n$. $\left(\inf_n a_n := \inf\{a_n;\ \forall n \in \mathbb{N}\}\right)$

Dim. (caso non crescente) sia $L = \inf_n a_n$. Se mostriamo che $\forall L' \geq L\ \exists\, m$ t.c. $\forall\, n \geq m$ si ha $L \leq a_n < L'$, allora $L = \lim_n a_n$.

Per def. di inf $\exists m$ t.c. $a_m < L'$. Per la non crescenza di $\{a_n\}$, si ha $a_n \leq a_m\ \forall\, n \geq m$, e quindi

$L \leq a_n \leq a_m < L'\ \forall\, n \geq m$. $\square$

Corollario Importante. Ogni successione monotona limitata converge in $\mathbf{R}$.

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$

è monotona crescente (o non decrescente) in A quando

$$\forall x_1, x_2 \in A \ , \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Quando $A = \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) = a_n$$

$$\boxed{\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ , \ n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \leq a_{n_2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq a_{n+1}}$$

SUCCESSIONI

Teorema. *Sia $\{a_n\}$ monotona non decrescente. Allora $\{a_n\}$ non oscilla e*

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n \,;$$

sia $\{a_n\}$ monotona non crescente. Allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$$\lim_n a_n = \inf_n a_n \,.$$

Dim. (caso non decrescente).

1mo *caso*: $\{a_n\}$ non limitata (superiormente), cioè $\sup_n a_n = +\infty$. Questo significa che:

$$\text{NON VALE} \;: \exists\, M > 0 : \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall\, M > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : \quad a_m > M}$$

$\{a_n\}$ non decrescente $\Rightarrow$ $\forall\, n \geq m$ $a_n \geq a_m > M$

$\Rightarrow$ $a_n \to +\infty (= \sup_n a_n)$.

2° *caso*: $\{a_n\}$ limitata (superiormente), cioè $\sup_n a_n = \Lambda \in \mathbb{R}$. Allora:

- $a_n \leq \Lambda$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;
- $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\Lambda - \varepsilon < a_{m_\varepsilon} \leq \Lambda$.

$\{a_n\}$ non decrescente

$\Rightarrow$ $\forall\, n \geq m_\varepsilon$ $\Lambda - \varepsilon < a_{m_\varepsilon} \leq a_n \leq \Lambda < \Lambda + \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $a_n \to \Lambda (= \sup_n a_n)$.

Teorema. *La successione* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *è stretta-mente crescente e limitata.*

Dim. (CRESCENZA) È

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k};$$

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Perchè sia $a_n < a_{n+1}$ basta dunque vedere che $\forall\ k, n$

$$(*) \qquad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Dimostriamolo per induzione su k. Per $k = 0$ si ha

$$\binom{n}{0} \frac{1}{(n)^0} = 1 = \binom{n+1}{0} \frac{1}{(n+1)^0}.$$

Supponiamo ora che $k \geq 1$, e che valga

$$\binom{n}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} \leq \binom{n+1}{k-1} \frac{1}{(n+1)^{k-1}}.$$

Allora

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

Questa somma si può calcolare facilmente:

iii) sia $a \neq 1$; allora $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \frac{1-a^n}{1-a}$, infatti basta ricordare che

$$(1-a^n) = (1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}).$$

In particolare ($a = 1/2$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 2 - 2^{1-n}.$$

Tirando le somme,

$$a_n \leq 1 + 2 - 2^{1-n} < 3.$$

$\square$

Ricordiamo la seguente definizione.

Def. *Costante di Nepero*:

$$\boxed{e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ : \ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}.}$$

Si chiama *esponenziale* la funzione $exp(x) = e^x$ con dominio $\mathbf{R}$.

Ne segue il

Corollario. $\boxed{e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.}$

Poiché $\{a_n\}$ è strettamente crescente si ha $a_k < a_n$ $\forall n > k$. Passando al limite in n otteniamo $a_{k-1} < a_k \leq \lim_n a_n = e$ da cui si ha $a_k < e$ $\forall k$ (scrivendo k al posto di $k-1$). Analogamente da $a_n < 3$ si ottiene $e \leq 3$. Calcolando a_k per $k = 1, 2$ otteniamo cosí:

$$2 < \frac{9}{4} < e \leq 3.$$

Osserviamo che per avere stime migliori dal basso è sufficiente calcolare a_k per valori più grandi di k. Per una stima migliore dall'alto miglioriamo il conto precedente.

$\forall k \geq 2$ si ha

$k! = k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \geq 3 \cdots 3 \cdot 2 = 3^{k-2} \cdot 2.$

Dunque si ha

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} 2^{-1} 3^{2-k} = 2 + 2^{-1} \sum_{j=0}^{n-2} 3^{-j}$$

$$= 2 + 2^{-1} \frac{1 - (1/3)^{n-1}}{1 - (1/3)} < 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{4}$$

da cui $e \leq 11/4$. In particolare abbiamo provato che $2 < e < 3$.