CALCOLO DEI LIMITI

Definiamo le operazioni di somma e prodotto coinvolgendo i simboli $+\infty$ e $-\infty$.

RETTA REALE ESTESA e OPERAZIONI ALGEBRICHE

Def. Sia $x \in \mathbf{R}$. Definiamo:

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty;$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \forall x > 0;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \quad \forall x < 0;$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty, \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty, ;$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R};$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty, \quad \forall x > 0;$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty, \quad \forall x < 0.$$

FORME INDETERMINATE

$$\boxed{(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad +\infty^0}$$

Ad esempio, vediamo perché non si può dare un senso alla forma $\boxed{+\infty - \infty}$:

i) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = 1 - n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = 1 \to 1$;

ii) consideriamo $a_n = 2n$ e $b_n = -n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = n \to +\infty$;

iii) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = -n + (-1)^n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = (-1)^n$ è oscillante.

ESERCIZIO: costruire due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \to \pm\infty$, $b_n \to 0$ e $a_n \cdot b_n \to L \in \mathbf{R}$ (oppure $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$, oppure $a_n \cdot b_n$ oscilla).

1. $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$
2. $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$
3. $a_n = n^2$, $b_n = \frac{1}{n}$
4. $a_n = n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$\square$

CALCOLO DEI LIMITI

Teorema. (PROPRIETÀ DEI LIMITI) *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni reali convergenti o divergenti a $\pm\infty$. Se non si hanno forme indeterminate, allora*

$$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n \tag{1}$$

$$\lim_n (a_n \cdot b_n) = (\lim_n a_n) \cdot (\lim_n b_n) \tag{2}$$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n} \tag{3}$$

(in (3) supponiamo $b_n \neq 0 \ \forall n$ e $\lim_n b_n \neq 0$).

- $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$

NON VALE quando:

$\lim_n a_n = \pm\infty$ e $\lim_n b_n = \mp\infty$

- $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$

NON VALE quando:

$\lim_n a_n = \pm\infty$ e $\lim_n b_n = \pm\infty$

- $\lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$

NON VALE quando:

$\lim_n a_n = 0$ e $\lim_n b_n = \pm\infty$

- $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}$

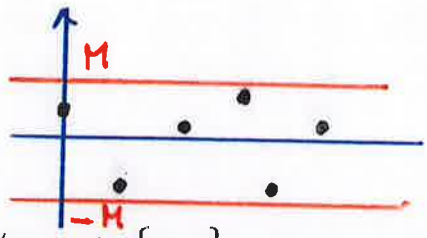
NON VALE quando:

$\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ (f.i. $\frac{0}{0}$)

$\lim_n a_n = \pm\infty$ e $\lim_n b_n = \pm\infty$ (f.i. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Alla dimostrazione premettiamo alcuni risultati.

Def. $\{a_n\}$ si dice *limitata* se
$\exists\, M > 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbf{N}$.



$\Updownarrow$

$-M \leq a_n \leq M$

Teorema. (LIMITATEZZA) $\{a_n\}$ *convergente* $\Longrightarrow \{a_n\}$ *limitata.*

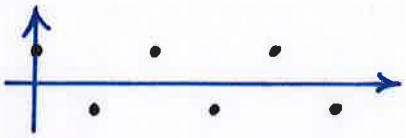
($\{a_n\}$ non limitata $\Rightarrow \{a_n\}$ non convergente)

Dim. Sia $L = \lim_n a_n$. Sia $m : \forall n \geq m \quad |a_n - L| \leq 1$. Si ha:
Allora $\forall n \geq m \quad |a_n| \leq |L| + 1$. Dunque $\forall n$ $\quad |a_n| - |L| \leq |a_n - L|$

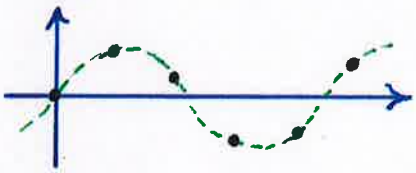
$|a_n| \leq \max\{|L| + 1,\ |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m-1}|\} < +\infty$. $\square$

ATTENZIONE: **NON** vale il viceversa. Per esempio:

1. $a_n = (-1)^n$



2. $a_n = \sin n$.



Proposizione 1. *$\{a_n\}$ limitata, $\{b_n\}$ diverge positivamente (negativamente) $\Longrightarrow$*

$\{a_n + b_n\}$ diverge positivamente (negativamente).

Dim. Supponiamo che $\{b_n\}$ diverga positivamente. Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s\ \forall n$. Fissiamo $M > 0$, e sia $m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $b_n \geq M + s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha $a_n + b_n \geq b_n - |a_n| \geq M$.

Nel caso in cui $\{b_n\}$ diverga negativamente si applica il risultato provato alle successioni $\{-a_n\}$ e $\{-b_n\}$. $\square$

limitata

ESEMPIO: La successione $\{n + \boxed{(-1)^n \frac{2n}{n+1} \cos n}\}$ diverge positivamente.

diverge pos.

$$\left|(-1)^n \frac{2n}{n+1} \cos n\right| = \overbrace{\underbrace{\frac{2n}{n+1}}_{\leq 2} \underbrace{|\cos n|}_{\leq 1}}^{\leq 2}$$

Proposizione 2. *$\{a_n\}$ limitata, $\{b_n\}$ infinitesima $\Longrightarrow$ $\{a_n b_n\}$ infinitesima.*

Dim. Sia $\varepsilon > 0$. Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s$ $\forall n$. Sia $m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \leq \varepsilon/s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

ESEMPIO: La successione $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\underbrace{\sin(2n) - 7\cos(42n!)}_{\text{limitata}}\right)\right\}$ è infinitesima.

infinitesima

Proposizione 3. *La somma di successioni infinitesime è infinitesima.*

Dim. Esercizio. $\square$

Proviamo il teorema sulle proprietà dei limiti.

Dim. Sia $a_n \to L$ e $b_n \to L'$ $(L, L' \in \overline{\mathbf{R}})$. $(L + L' \neq \pm\infty \mp \infty)$

Verifichiamo che: $a_n + b_n \longrightarrow L + L'$

SUCCESSIONI

Teorema. *Dimostriamo che:*

$$\begin{array}{lcl} a_n \to L \in \overline{\mathbb{R}} & & \\ b_n \to L' \in \overline{\mathbb{R}} & \Rightarrow & a_n + b_n \to L + L' \\ L + L' \neq \pm\infty \mp \infty & & \end{array}$$

Dim.

Caso i: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono (cioè $L, L' \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ $\{a_n - L\}$ e $\{b_n - L'\}$ sono infinitesime
Prop.3 $\Rightarrow \{(a_n - L) + (b_n - L')\} = \{(a_n + b_n) - (L + L')\}$ è infinitesima $\Leftrightarrow a_n + b_n \to L + L'$

Caso ii: $\{a_n\}$ converge, $\{b_n\}$ diverge (cioè $L \in \mathbb{R}$ e $L' = \pm\infty$) $\Rightarrow \{a_n\}$ limitata $\Rightarrow \{a_n + b_n\}$ diverge
Teo. limitatezza

Caso iii: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ divergono (cioè $L = \pm\infty$ e $L' = \pm\infty$). Consideriamo il caso $L = L' = +\infty$.

$$\Rightarrow \underline{\forall M > 0}\ \underline{\exists m \in \mathbb{N}} : \begin{cases} a_n \geq \frac{M}{2}, \ \forall n \geq m \\ \\ b_n \geq \frac{M}{2}, \ \forall n \geq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{a_n + b_n \geq M}, \underline{\forall n \geq m} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$$

SUCCESSIONI IN FORMA DI POTENZA

Proposizione 1. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche, con $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [0,+\infty] \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = L' \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Allora:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = L^{L'}\,, \quad$ se $L \in]0,+\infty[\,,\ L' \in \mathbb{R}\,,$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = +\infty\,, \quad$ se $\begin{cases} L \in]1,+\infty[\,,\ L' = +\infty\,, \\ L = +\infty\,,\ L' \in]0,+\infty]\,, \\ L \in]0,1[\,,\ L' = -\infty\,, \\ L = 0\,,\ L' \in [-\infty,0[\,, \end{cases}$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0\,, \quad$ se $\begin{cases} L \in]1,+\infty[\,,\ L' = -\infty\,, \\ L = +\infty\,,\ L' \in [-\infty,0[\,, \\ L \in]0,1[\,,\ L' = +\infty\,, \\ L = 0\,,\ L' \in]0,+\infty]\,. \end{cases}$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x > 0 \ :\ x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}} \qquad \begin{pmatrix} x = a_n \\ \alpha = b_n \end{pmatrix}$$

La verifica delle relazioni di limite precedente si basa su:

I. L'identità $\boxed{a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}}$ $(a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N})$;

II. Le proprietà seguenti:

Proposizione 2. Se $\{c_n\}$ è una successione tale che $c_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = L \in [0, +\infty]$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} \log c_n = \begin{cases} \log L\,, & \text{se } L \in]0, +\infty[\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ -\infty\,, & \text{se } L = 0\,. \end{cases} \qquad (c_n = a_n)$$

Proposizione 3. Se $\{c_n\}$ è una successione tale che $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} e^{c_n} = \begin{cases} e^{L}\,, & \text{se } L \in \mathbb{R}\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ 0\,, & \text{se } L = -\infty\,. \end{cases} \qquad (c_n = b_n \log a_n)$$

Il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n}$ presenta:

1. La forma indeterminata 0^0, quando $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$;

$\Downarrow (a_n > 0, \forall n)$

$\lim_{n\to\infty} \log a_n = -\infty$

2. La forma indeterminata $+\infty^0$, quando $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$;

3. La forma indeterminata $1^{\pm\infty}$, quando $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$.

$$\boxed{a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}}$$

Nei casi 1, 2, 3, $b_n \log a_n$ presenta la forma indeterminata $0\cdot(\pm\infty)$