SUCCESSIONI NUMERICHE

Def. Una successione è una funzione

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}. \quad \left(f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \longrightarrow \mathbb{R}\right)$$

Indichiamo $f(n)$ con a_n e la successione con $\{a_n\}$.
a_n è l'elemento n-esimo della successione $\{a_n\}$.
(valore n-esimo)

ALCUNE SUCCESSIONI IMPORTANTI.

1) Il *fattoriale di n* (o *n fattoriale*):

$$\boxed{0! = 1, \qquad \forall n \in \mathbf{N}\ (n+1)! = (n+1) \cdot n!}$$

ovvero (p.es. se $n \geq 3$): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.
Quindi: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$,...

2) I *coefficienti binomiali.*
Siano $k, n \in \mathbf{N}, 0 \leq k \leq n$. Allora:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}.$$

Esempi. $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{5}{2} = 10$.

3) Il simbolo di *somma* (o *sommatoria*): data una successione $\{a_n\}$ definiamo:

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

LIMITE DI SUCCESSIONI

L'operazione di limite consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda *"Come si comportano i valori di una successione $\{a_n\}$, al crescere dell'indice n?"*

Esempio: $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots +\infty$
a_n	1	0.75	0.63	0.5625	0.5313	0.5156	0.5078	0.5039	0.502	0.501	$\cdots L=0{,}5$
$\lvert a_n - L\rvert$	0.5	0.25	0.13	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.002	0.001	$\longrightarrow 0$

Qualitativamente: I valori a_n si "avvicinano" in modo "progressivo" al "valore limite" $L = 0.5$.

Def. $\{a_n\}$ *converge ad* $L \in \mathbb{R}$, quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon , \ |a_n - L| \leq \varepsilon .$$

L si dice *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ oppure $a_n \to L$, $n \to +\infty$.

LIMITE DI SUCCESSIONI

L'operazione di limite consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda *"Come si comportano i valori di una successione $\{a_n\}$, al crescere dell'indice n?"*

Esempio: $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots +\infty$
a_n	1	0.75	0.63	0.5625	0.5313	0.5156	0.5078	0.5039	0.502	0.501	$\ldots L=0{,}5$
$\lvert a_n - L\rvert$	0.5	0.25	0.13	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.002	0.001	$\to 0$

"errore" commesso approssimando L con a_n

Qualitativamente: I valori a_n si "avvicinano" in modo "progressivo" al "valore limite" $L = 0.5$.

$x, y \in \mathbb{R}$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & x < y \end{cases}$$

Def. $\{a_n\}$ *converge ad* $L \in \mathbb{R}$, quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon, \ |a_n - L| \leq \varepsilon .$$

L si dice *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ oppure $a_n \to L$, $n \to +\infty$.

LIMITE DI SUCCESSIONI

L'operazione di limite consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda *"Come si comportano i valori di una successione $\{a_n\}$, al crescere dell'indice n?"*

Esempio: $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$

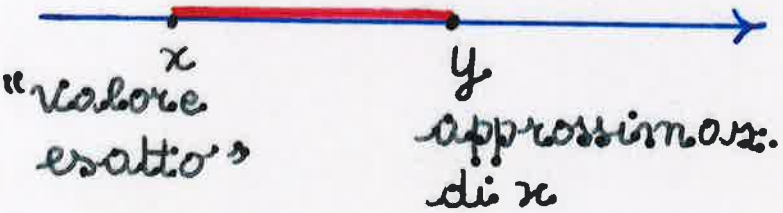
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots +\infty$
a_n	1	0.75	0.63	0.5625	0.5313	0.5156	0.5078	0.5039	0.502	0.501	$\cdots L=0{,}5$
$\lvert a_n - L\rvert$	0.5	0.25	0.13	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.002	0.001	$\longrightarrow 0$

"errore" commesso approssimando L con a_n

$|a_n - L| \leq 0{,}1$

"soglia di tolleranza" per l'errore $|a_n - L|$

Qualitativamente: I valori a_n si "avvicinano" in modo "progressivo" al "valore limite" $L = 0.5$.



$x, y \in \mathbb{R}$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & x < y \end{cases}$$

Def. $\{a_n\}$ *converge ad* $L \in \mathbb{R}$, quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon, \ |a_n - L| \leq \varepsilon .$$

L si dice *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ oppure $a_n \to L$, $n \to +\infty$.

LIMITE DI SUCCESSIONI

L'operazione di limite consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda *"Come si comportano i valori di una successione $\{a_n\}$, al crescere dell'indice n?"*

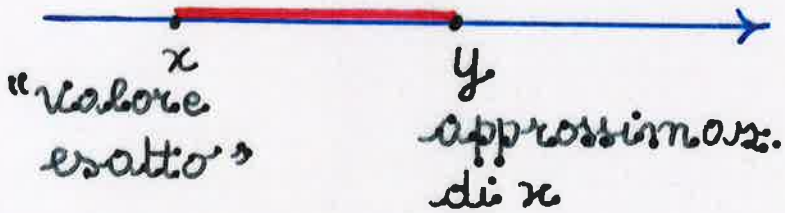
Esempio: $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots +\infty$
a_n	1	0.75	0.63	0.5625	0.5313	0.5156	0.5078	0.5039	0.502	0.501	$\ldots L=0{,}5$
$\lvert a_n - L\rvert$	0.5	0.25	0.13	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.002	0.001	$\to 0$

"errore" commesso approssimando L con a_n

$|a_n - L| \leq 0{,}01$

Qualitativamente: I valori a_n si "avvicinano" in modo "progressivo" al "valore limite" $L = 0.5$.



$x, y \in \mathbb{R}$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & x < y \end{cases}$$

Def. $\{a_n\}$ *converge ad* $L \in \mathbb{R}$, quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon, \ |a_n - L| \leq \varepsilon .$$

L si dice *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ oppure $a_n \to L$, $n \to +\infty$.

LIMITE DI SUCCESSIONI

L'operazione di limite consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda *"Come si comportano i valori di una successione $\{a_n\}$, al crescere dell'indice n?"*

Esempio: $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots +\infty$
a_n	1	0.75	0.63	0.5625	0.5313	0.5156	0.5078	0.5039	0.502	0.501	$\ldots L=0{,}5$
$\lvert a_n - L\rvert$	0.5	0.25	0.13	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.002	0.001	$\longrightarrow 0$

"errore" commesso approssimando L con a_n

$|a_n - L| \leq 0{,}1$

"soglia di tolleranza" per l'errore $|a_n - L|$

Qualitativamente: I valori a_n si "avvicinano" in modo "progressivo" al "valore limite" $L = 0.5$.

$x, y \in \mathbb{R}$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & x < y \end{cases}$$

Def. $\{a_n\}$ *converge ad* $L \in \mathbb{R}$, quando:

soglia di tolleranza — definitivamente — errore commesso approssimando L con a_n

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \boxed{\forall n \geq m_\varepsilon}, \ |a_n - L| \leq \varepsilon .$$

L si dice *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive

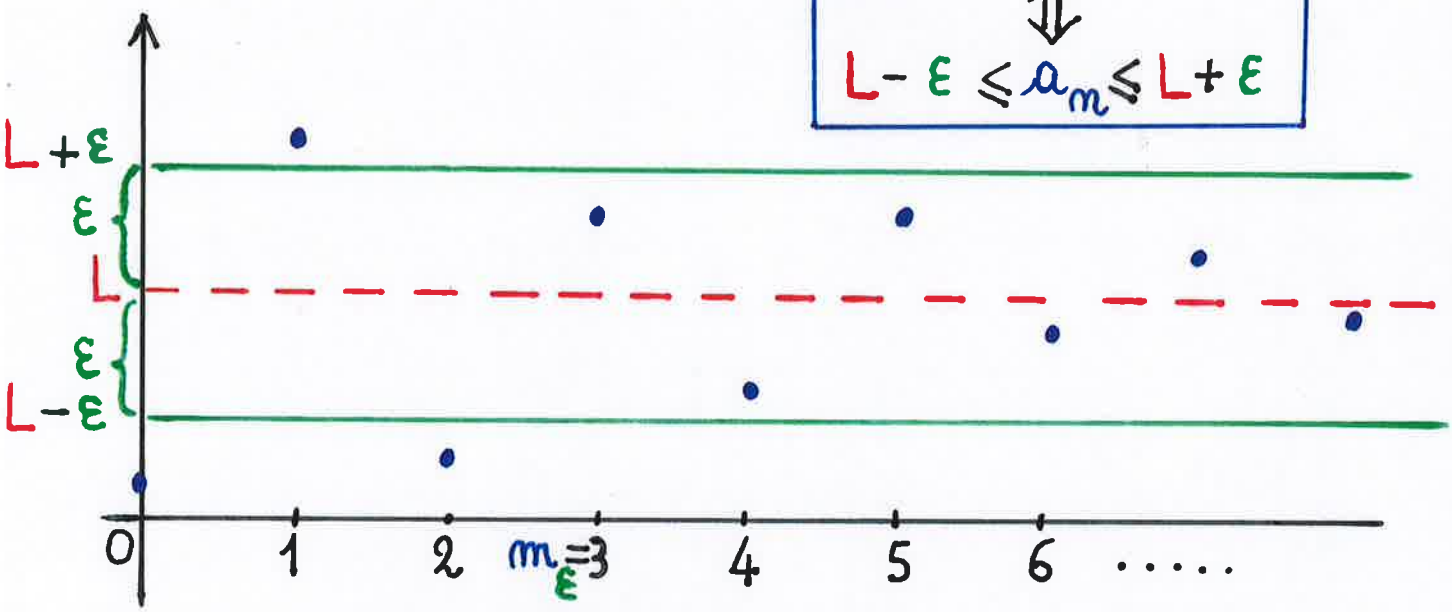
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \text{ oppure } a_n \to L, \ n \to +\infty .$$

Interpretazione grafica di $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_\varepsilon, \boxed{|a_n - L| \leq \varepsilon.} \quad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$$



Osservazioni:

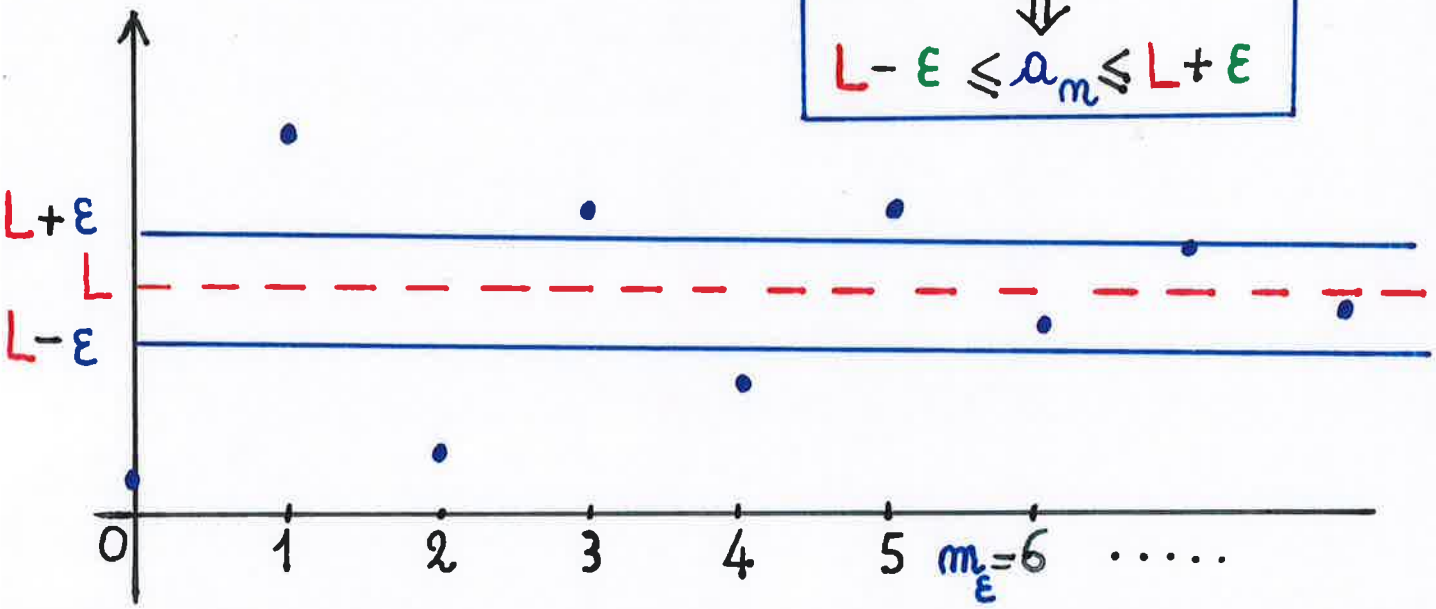
- L'intero m_ε dipende dalla soglia ε prefissata (tipicamente, tanto più piccolo è ε, tanto più grande dovrà essere m_ε)
- Non è restrittivo limitarsi a verificare la condizione (1) soltanto per tutti gli ε minori o uguali ad una prefissata soglia $\varepsilon_0 > 0$ (sufficientemente piccola)

Interpretazione grafica di $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_\varepsilon , \quad \boxed{|a_n - L| \leq \varepsilon .} \quad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$$



Osservazioni:

- L'intero m_ε dipende dalla soglia ε prefissata (tipicamente, tanto più piccolo è ε, tanto più grande dovrà essere m_ε)
- Non è restrittivo limitarsi a verificare la condizione (1) soltanto per tutti gli ε minori o uguali ad una prefissata soglia $\varepsilon_0 > 0$ (sufficientemente piccola)

Verifica formale del limite: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

Dobbiamo verificare che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \ \forall\, n \geq m_\varepsilon\ \left|\frac{2^n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$$

Fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, consideriamo la disuguaglianza finale

$$\left|\frac{2^n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon\,. \tag{2}$$

Obiettivo: determinare un intero $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per tutti gli interi $n \geq m_\varepsilon$ la disuguaglianza (2) sia verificata.

Strategia: "risolviamo" la (2) rispetto ad n:

$$\left|\frac{2^n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \left|\frac{2^n+1-2^n}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{n+1} \geq \frac{1}{\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ n+1 \geq \log_2\frac{1}{\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ n \geq \log_2\frac{1}{\varepsilon} - 1\,.$$

Indichiamo con m_ε un numero intero positivo tale che:

$$\boxed{m_\varepsilon \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

(un tale numero $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ esiste certamente, poiché $\mathbb{R}$ è un campo Archimedeo), allora

$$\boxed{\forall n \geq m_\varepsilon \;\Rightarrow\; \left| \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon \,.}$$

Dunque l'intero m_ε, definito come sopra, ci permette di conseguire l'obiettivo preposto. Data l'arbitrarietà dell'ε prefissato nel ragionamento, quanto precede dimostra la validità del limite.

Limiti di successioni

Def. Sia $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$; essa è *infinitesima* quando

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_\varepsilon \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon \quad |a_n| \leq \varepsilon;} \quad \rightarrow L = 0$$

essa *converge* a $L \in \mathbf{R}$ quando $\{a_n - L\}$ è infinitesima:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_\varepsilon \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon \quad |a_n - L| \leq \varepsilon.}$$

NOTAZIONE: $\boxed{a_n \to L.}$

Def. Se $a_n \to L$ allora L viene chiamato il *limite* della successione $\{a_n\}$, e si denota con uno dei simboli

$$\lim_n a_n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

ESEMPIO: $\{(-1)^n \frac{3}{2n}\}$ è infinitesima: fissato $\varepsilon > 0$ per l'Archimedeità di $\mathbf{R}$ $\exists m \in \mathbf{N} : \ m \geq \frac{3}{2\varepsilon}$, ovvero $\frac{3}{2m} \leq \varepsilon$, per cui, se $n \geq m$

$$|(-1)^n \frac{3}{2n}| = \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{2m} \leq \varepsilon.$$

Teorema. (UNICITÀ) $\boxed{a_n \to L, \ a_n \to L' \Longrightarrow L = L'.}$

Dim. Per la definizione di limite valgono entrambe le condizioni:

* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_\varepsilon \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m_\varepsilon \ \ |a_n - L| \leq \varepsilon;$

* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m'_\varepsilon \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m'_\varepsilon \ \ |a_n - L'| \leq \varepsilon;$

Allora, $\forall n \geq \max\{m_\varepsilon, m'_\varepsilon\}$ $|a_n - L| \leq \varepsilon$, $|a_n - L'| \leq \varepsilon$. Allora

disuguagl. triangolare

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| \leq 2\varepsilon.$$

Questo dice che deve essere $|L - L'| = 0$, ovvero $L = L'$.

$\square$

Def. *Intorno di $x \in \mathbf{R}$*: ogni insieme che contiene un intervallo, non ridotto ad un punto, di centro x.

Proposizione. $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$, $L \in \mathbf{R}$. *Allora* $a_n \to L \Longleftrightarrow \forall$ *intorno* I *di* L $\exists m \in \mathbf{N}: \ \forall n \geq m$ *si ha* $a_n \in I$.

Dim. Sia $a_n \to L$. Fissiamo I intorno di L. Allora $\exists \varepsilon > 0 : |L - x| \leq \varepsilon \Longrightarrow x \in I$. Per def. di limite $\exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \ |a_n - L| \leq \varepsilon$, quindi $a_n \in I$.

Viceversa: si prende $I = \{x : \ |L - x| \leq \varepsilon\}$. Allora $a_n \in I \Longleftrightarrow |a_n - L| \leq \varepsilon$. $\square$

ESEMPIO (IMPORTANTE): Sia $x \in \mathbf{R}$ con $|x| < 1$, allora $x^n \to 0$. ($\{x^n\}$ è infinitesima, per $|x|<1$)

Dim. Dato che $1/(n+1) \to 0$, sia $m \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m$ si ha

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 - |x|.$$

Quindi per $n \geq m$, $|x| \leq 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Sia ora $C = m|x|^m$. Proviamo per induzione che

$$|x|^n \leq \frac{C}{n} \qquad \forall n \geq m.$$

Infatti per $n = m$ si ha un'identità. Supposto che $|x|^n \leq C/n$ si ha

$$|x|^{n+1} = |x|^n |x| \leq |x| \frac{C}{n} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{C}{n} = \frac{C}{n+1}.$$

Dunque $|x|^n$ è infinitesima. $\square$

OSSERVAZIONE: se $\{a_n\}$ è infinitesima e $\exists m \in \mathbb{N}: |b_n| \leq C|a_n|, \forall n \geq m$ allora anche $\{b_n\}$ è infinitesima.

SUCCESSIONI DIVERGENTI O OSCILLANTI

Def. $\{a_n\}$ si dice *divergente positivamente* se Es: $a_n = 2^n$

$$\boxed{\forall M > 0 \ \exists m_M \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m_M \ \ a_n \geq M.}$$

$\{a_n\}$ si dice *divergente negativamente* se Es: $a_n = -n^2$

$$\boxed{\forall M > 0 \ \exists m_M \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m_M \ \ a_n \leq -M.}$$

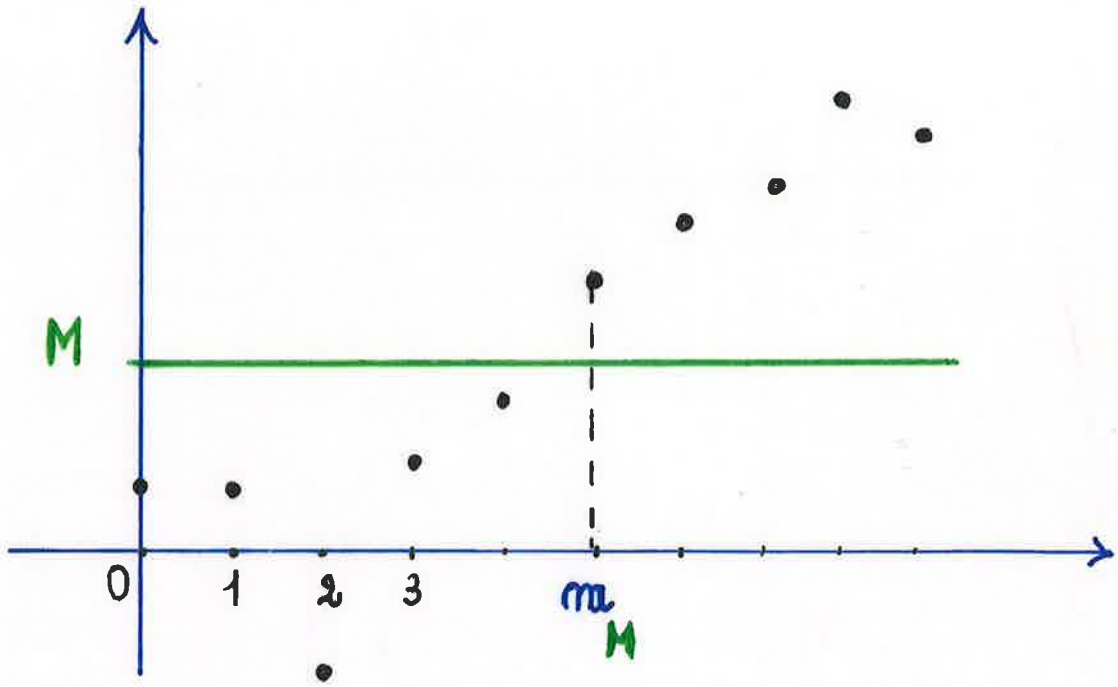
$\{a_n\}$ si dice *oscillante* o *indeterminata* se non è né convergente né divergente.

OSSERVAZIONE:

Sia $a_n \neq 0 \ \forall n$, allora

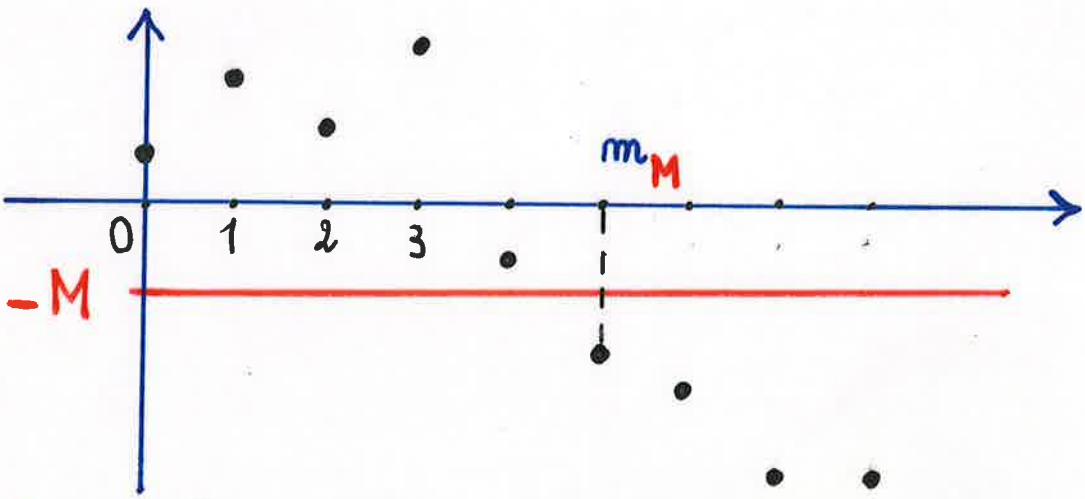
1. se $a_n > 0$, $\{a_n\}$ è divergente positivamente $\Longleftrightarrow \{\frac{1}{a_n}\}$ è infinitesima;
2. se $a_n < 0$, $\{a_n\}$ è divergente negativamente $\Longleftrightarrow \{\frac{1}{a_n}\}$ è infinitesima.
3. se $a_n > 0$, $\{a_n\}$ div. positiv. $\Rightarrow \{a_n^\beta\}$ div. positiv. e $\beta > 0$
4. Se $a_n > 0$, $\{a_n\}$ div. positiv. $\Rightarrow \{a_n^\beta = \frac{1}{a_n^{-\beta}}\}$ infinit. e $\beta < 0$

1) $\{a_n\}$ diverge positivamente



$$\forall M > 0 \quad \exists\, m_M \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_M \qquad a_n \geq M$$

2) $\{a_n\}$ diverge negativamente



$$\forall M > 0 \quad \exists\, m_M \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_M \qquad a_n \leq -M$$