NUMERI COMPLESSI: DA $\mathbb{R}$ A $\mathbb{C}$

L'equazione algebrica

$$\boxed{x^2 + 1 = 0}$$

NON ammette soluzioni in $\mathbb{R}$. Infatti:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 0\,.$$

Più in generale, l'equazione algebrica di 2° grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0\,;}$$

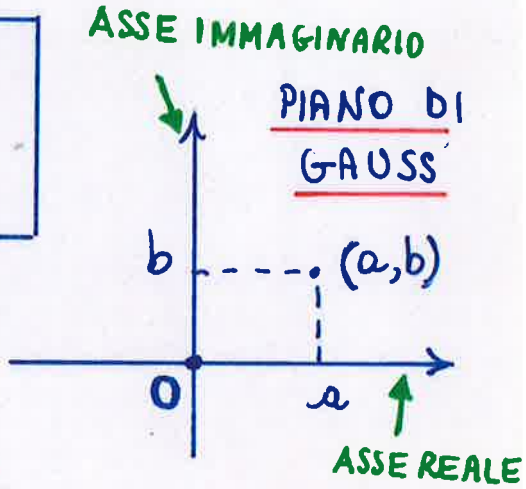
con $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ tali che $\Delta := b^2 - 4ac < 0$ NON ammette soluzioni reali. Infatti:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \begin{array}{l} ax^2 + bx + c > 0\,, \text{ se } a > 0 \\ ax^2 + bx + c < 0\,, \text{ se } a < 0 \end{array}$$

NUMERI COMPLESSI

Def. L'insieme dei *numeri complessi* $\mathbf{C}$ è identificabile con $\mathbf{R}^2$ dotato delle operazioni di somma e prodotto definite da

$$\boxed{\begin{aligned}(a,b)+(a',b') &= (a+a',b+b')\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,ad+bc)\end{aligned}}$$



Teorema $(\mathbf{C},+,\cdot)$ è *un campo.*

- Lo "zero" è dato da $(0,0)$; l'"uno" da $(1,0)$.
- L'opposto di (a,b) è $(-a,-b)$.
- L'inverso di $(a,b)\neq(0,0)$ è

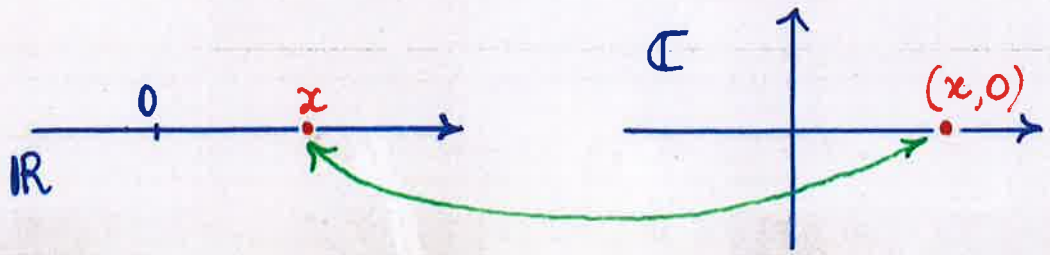
$$\left(\frac{a}{(a^2+b^2)},\frac{-b}{(a^2+b^2)}\right).$$

$\square$

OSSERVAZIONE: se $x,y\in\mathbf{R}$

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0),\qquad (x,0)\cdot(y,0)=(xy,0)$$

quindi $x\mapsto(x,0)$ rappresenta un isomorfismo di campi tra $\{(a,b)\in\mathbf{C}:b=0\}$ e $\mathbf{R}$. D'ORA IN POI: identificheremo questi due insiemi, ovvero ogni numero $x\in\mathbf{R}$ con $(x,0)\in\mathbf{C}$. In questo senso: $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.



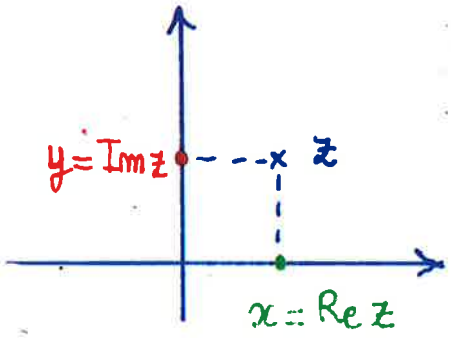
Def. *Unità immaginaria* $i = (0,1)$. Notare che si ha $i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$.

Si ha $ib = (0,1)\cdot(b,0) = (0,b)$, per cui $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib$ (*forma algebrica*). Possiamo dire quindi

"$\mathbf{C}$ è l'insieme dei punti della forma $a+ib$ con $a, b \in \mathbf{R}$ e $i^2 = -1$."

Se $z = x + iy \in \mathbf{C}$ allora definiamo

$$\operatorname{Re} z = x \in \mathbf{R} \qquad \operatorname{Im} z = y \in \mathbf{R}$$



(*parte reale* e *parte immaginaria* di z).

NOTA: per effettuare calcoli algebrici su $\mathbf{C}$ basta usare la forma algebrica e le regole dell'algebra con in più $i^2 = -1$; da ricordare inoltre che

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

ESEMPIO: trovare l'inverso di $z = 1 + i$.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd =$$
$$= \underbrace{(ac-bd)} + i\underbrace{(ad+bc)}$$

ESEMPIO: Consideriamo l'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Allora le due radici di tale equazione sono:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Infatti

$$a(z-z_1)(z-z_2) = a\overbrace{\left((z+\frac{b}{2a})-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)}^{z-z_1}\overbrace{\left((z+\frac{b}{2a})+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)}^{z-z_2}$$

$$= a\left((z+\frac{b}{2a})^2-i^2\frac{-\Delta}{4a^2}\right) = a\left(z^2+\frac{bz}{a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)$$

$$= az^2 + bz + c.$$

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a(z-z_1)(z-z_2) = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\iff z = z_1 \quad \text{o} \quad z = z_2$$

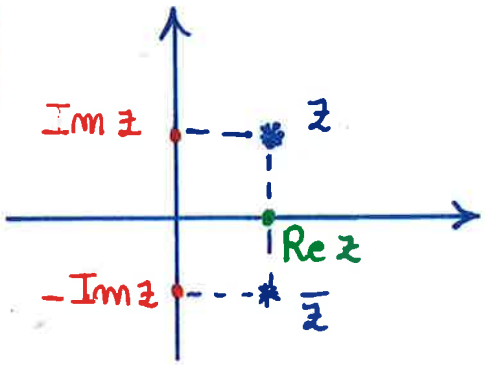
Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, le soluzioni di $az^2 + bz + c = 0$ sono:

$$z_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- due soluzioni reali distinte se $\Delta > 0$
- soluz. reali coincid. se $\Delta = 0$

Def. Il *complesso coniugato* di $z = x + iy \in \mathbf{C}$ è il numero

$$\boxed{\overline{z} = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.}$$



ESEMPI: 1) $z = 3 + 4i$, $\overline{z} = 3 - 4i$;
2) $z = 5 - 6i$, $\overline{z} = 5 + 6i$.

OPERAZIONI CON IL CONIUGATO

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1},$$

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

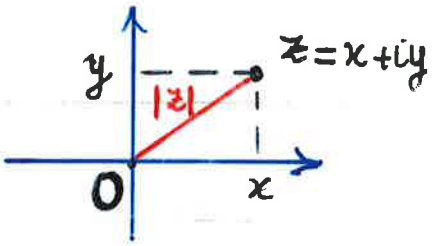
$$z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2,$$

$$\overline{\overline{z}} = z,$$

$$\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbf{R}.$$

Def. Il *modulo* di $z = x + iy \in \mathbf{C}$ è il numero

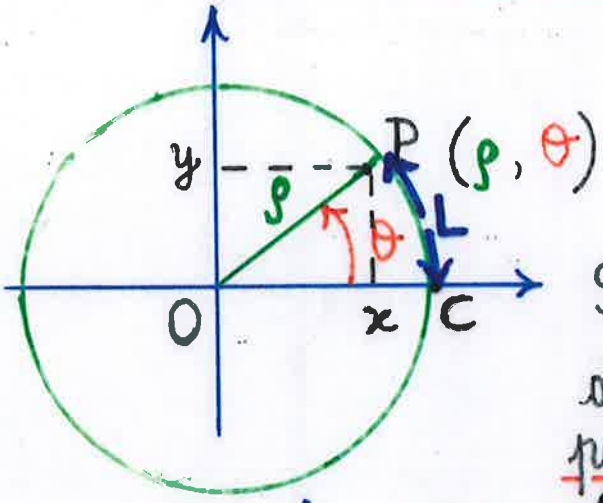
$$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$



N.B. Se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{z^2} = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ -z, & z < 0 \end{cases}$

ritroviamo il VALORE ASSOLUTO di z !!

Coordinate Polari nel Piano



$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ = distanza di P da O

Se $\rho > 0$, θ = misura in radianti dell'angolo formato dal semiasse positivo delle x e dalla semiretta OP, a meno di multipli di 2π.

Se $\rho = 0$ $(P \equiv O)$, $\theta \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

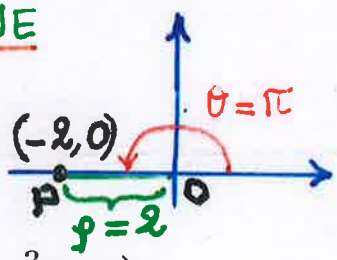
$$\theta = \frac{L}{\rho}$$

$$2\pi\mathbb{Z} = \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\}$$

- $(\rho, \vartheta) \equiv (\rho', \vartheta') \Longleftrightarrow \rho = \rho' = 0$ o $(\rho = \rho'$ e $\vartheta - \vartheta' \in 2\pi\mathbf{Z})$

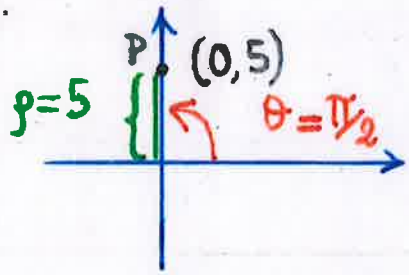
$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}}$$

Formule di passaggio dalle COORD. POLARI alle COORD. CARTESIANE

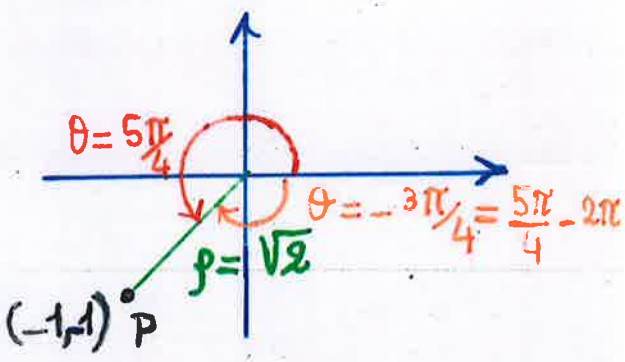


ESEMPI: 1) per $(-2, 0)$ si ha $\rho = 2$ e $\vartheta = \pi$;
2) per $(0, 5)$ si ha $\rho = 5$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$;
3) per $(-1, -1)$ si ha $\rho = \sqrt{2}$, $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$ (o $\vartheta = -\frac{3}{4}\pi \dots$);
4) le coord. polari $\rho = \frac{1}{3}$, $\vartheta = -\frac{3}{2}\pi$ corrispondono a $(0, \frac{1}{3})$.

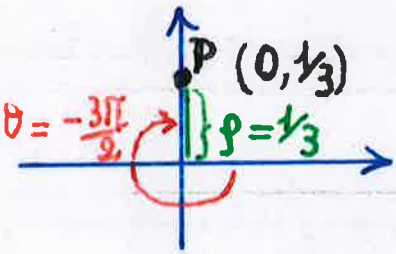
2)



3)



4)



Forma Trigonometrica dei Numeri Complessi

Se $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ha coord. polari (ρ, ϑ), allora

$\operatorname{Re} z = x = \rho \cos\theta$

$\operatorname{Im} z = y = \rho \sin\theta$

$$\boxed{z = x + iy = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$$

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

(*forma trigonometrica* del numero complesso z).

NOTAZIONE: $\rho = |z|$ *modulo* di z; $\left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

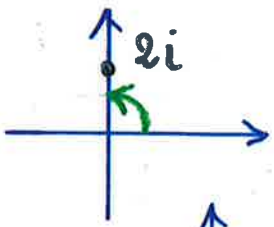
ϑ *argomento* di z; più precisamente

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \{\vartheta \in \mathbf{R} : z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\}}$$

ESEMPI: 1. $\operatorname{Arg}(0) = \mathbf{R}$,

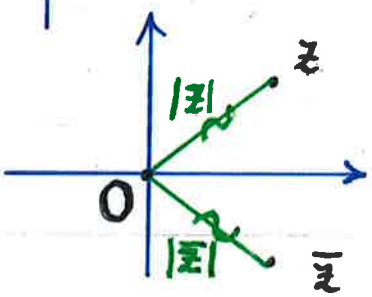
2. $\operatorname{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,

3. $|2i| = 2$.



Vale

$$\boxed{\begin{aligned} |\overline{z}| &= |z|, \\ z\overline{z} &= |z|^2. \end{aligned}}$$



FUNZIONE ESPONENZIALE

e: costante di Nepero ($e = 2,718281\ldots$)

$$e^x := \inf\{e^q : \ q \in \mathbb{Q}, \ q \geq x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Def. La **funzione esponenziale** è:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := e^x \end{aligned}$$

Proprietà fondamentali

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$
3. $x < y \Rightarrow e^x < e^y$ (cioè la funzione esponenziale è *monotóna strettamente crescente* in $\mathbb{R}$)

Conseguenze di 1:

4. $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$
5. $(e^x)^n = e^{nx}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Esponenziale Complesso

Problema: definire $e^z \in \mathbf{C}$, con $z \in \mathbf{C}$, in modo coerente con le proprietà delle potenze.

Def. Per $z = x + iy \in \mathbf{C}$, si pone

$$\boxed{e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)) = e^x(\cos y + i\sin y).}$$

ESEMPI:

N.B. Per $z = x + i0 = x \in \mathbb{R}$, $e^z = e^x(1 + i0) = e^x$ esponenziale in campo reale.

$$e^{(3-i)} = e^3(\cos(-1) + i\sin(-1)) = e^3(\cos 1 - i\sin 1);$$

$$e^{2i\pi} = e^0(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 1$$

$$e^{i\pi} = e^0(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1,$$

ovvero $\quad e^{i\pi} + 1 = 0.$

Dalla definizione di esponenziale complesso segue la FORMULA di EULERO, valida per ogni $\vartheta \in \mathbf{R}$:

$$z = i\vartheta \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = \vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.}$$

Dalla formula di Eulero segue che:

$$\boxed{\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2};} \qquad \boxed{\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}.}$$

Teorema. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

estende in $\mathbb{C}$ la proprietà analoga dell'esponenziale reale.

Dim. Siano $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$.

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^a e^c (\cos b + i \sin b)(\cos d + i \sin d)$$

$$= e^{a+c}\Big(\cos b \cos d - \sin b \sin d + i(\cos b \sin d + \sin b \cos d)\Big)$$

$$= e^{a+c}\Big(\cos(b+d) + i \sin(b+d)\Big)$$

FORMULE DI ADDIZIONE PER sin E cos

$$= e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{(a+ib)+(c+id)} = e^{z_1+z_2}.$$

OSSERVAZIONI:

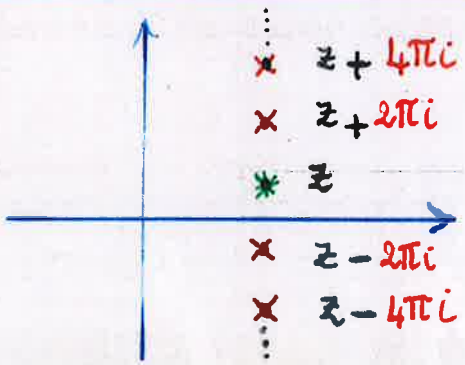
- $e^z e^{-z} = 1$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ $\Longrightarrow e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$
- $|e^{i\vartheta}| = 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$
- se $n \in \mathbf{N}$ vale $(e^z)^n = e^{nz}$,
- $e^{z_1} = e^{z_2} \Longleftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi i \mathbf{Z}$,

N.B. In $\mathbb{C}$ non ha senso dire $e^z > 0$ perchè NON c'è un ordinamento come in $\mathbb{R}$

cioè $2\pi i \mathbb{Z} = \{2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{e^{z+2k\pi i} = e^z \qquad \forall z \in \mathbf{C}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}.}$$

In altre parole, l'esponenziale complesso è periodico di periodo $2\pi i$.



N.B. La funzione di variabile reale $x \longmapsto e^x$ NON è periodica in $\mathbb{R}$!!

PERIODICITÀ DELL'ESPONENZIALE IN $\mathbb{C}$

$$z = x + iy$$

$$z + 2k\pi i = x + i(y + 2k\pi)$$

$$e^{z+2k\pi i} = e^{x}\left(\cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi)\right) =$$

$$= e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{z}$$

sin e cos **PERIODICHE** (Periodo: 2π)

Funzioni trigonometriche

$\forall z \in \mathbb{C}$:

Def. Dato $z \in \mathbf{C}$, si pone

VALE IN $\mathbb{C}$: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\boxed{\sin z = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}],} \qquad \boxed{\cos z = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}]}$$

(*formule di Eulero*). Si verificano le usuali proprietà per seno e coseno complessi. N.B. Per $z \in \mathbb{R}$ si ritrovano le funzioni sin e cos in campo reale (FORMULE DI EULERO).

NON VALE: $-1 \leq \sin z, \cos z \leq 1$!!

Forma esponenziale

Dalla forma trigonometrica di $z \in \mathbf{C}$ e dalla formula di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ segue

$$\boxed{z = \rho e^{i\vartheta}} \qquad \left(\begin{array}{l}\rho = |z| \\ \vartheta \in \operatorname{Arg} z\end{array}\right)$$

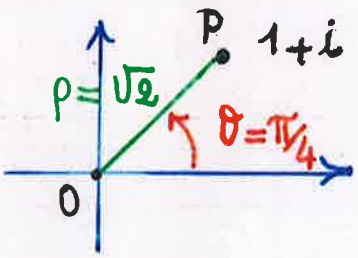
detta *forma esponenziale* di $z \in \mathbf{C}$.

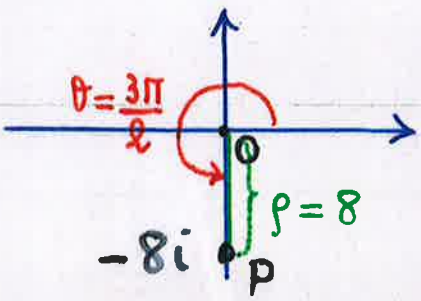
OSSERVAZIONE. La forma esponenziale è molto comoda per i conti: se $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$, allora

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}, \\ (z_1)^n &= \rho_1^n e^{in\vartheta_1}. \end{aligned}}$$

ESEMPIO:

$$(1+i)^6 = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^6 = (\sqrt{2})^6 e^{\frac{3}{2}\pi i} = 8e^{\frac{3}{2}\pi i} = 8(-i) = -8i$$





Radice n-esima di un numero complesso $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Def. $w \in \mathbf{C}$ è una radice n-esima di $z \in \mathbf{C}$ se $w^n = z$.

Dato

$$z = \rho e^{i\vartheta},$$

allora, al variare di $k = 0, \ldots, n-1$, gli n numeri complessi w_k dati da

$$\boxed{w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}$$

$k=0: \ \phi_0 = \frac{\vartheta}{n}$

$k=1: \ \phi_1 = \frac{\vartheta + 2\pi}{n}$

$\vdots$

$k=n-1: \ \phi_{n-1} = \frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n}$

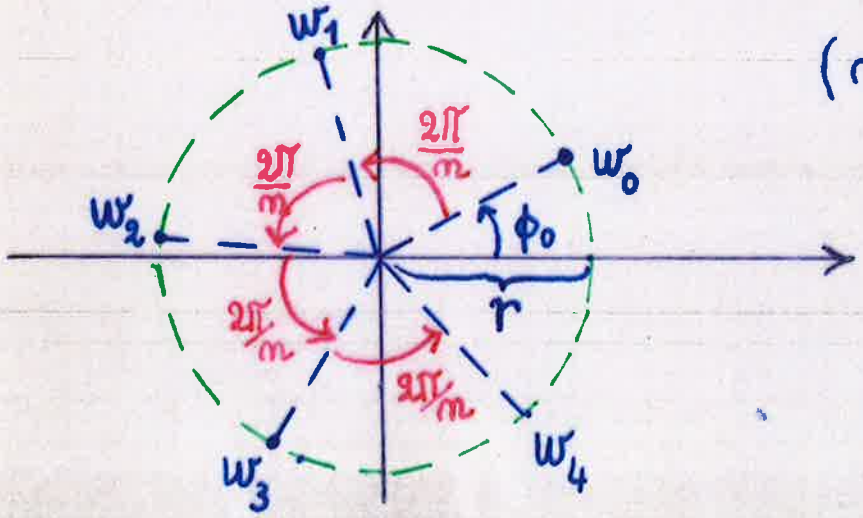
sono tutti radici n-esime di z.

Infatti

$$w_k^n = (\sqrt[n]{\rho} e^{i(\vartheta+2k\pi)/n})^n = \rho e^{i(\vartheta+2k\pi)} = \rho e^{i\vartheta} = z.$$

Teorema. *Ogni numero complesso non nullo ha esattamente n radici n-esime distinte.*

Nel piano complesso, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro 0 e raggio r. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{2\pi i/n}$, cioè con una rotazione di $2\pi/n$.



$(n=5)$

Radice n-esima di un numero complesso ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Def. $w \in \mathbf{C}$ è una radice n-esima di $z \in \mathbf{C}$ se $w^n = z$.

Dato

$$z = \rho e^{i\vartheta},$$

allora, al variare di $k = 0, \ldots, n-1$, gli n numeri complessi w_k dati da

$$\boxed{w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}$$

$k=0: \ \phi_0 = \frac{\vartheta}{n}$

$k=1: \ \phi_1 = \frac{\vartheta + 2\pi}{n}$

$\vdots$

$k=n-1: \ \phi_{n-1} = \frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n}$

sono tutti radici n-esime di z.

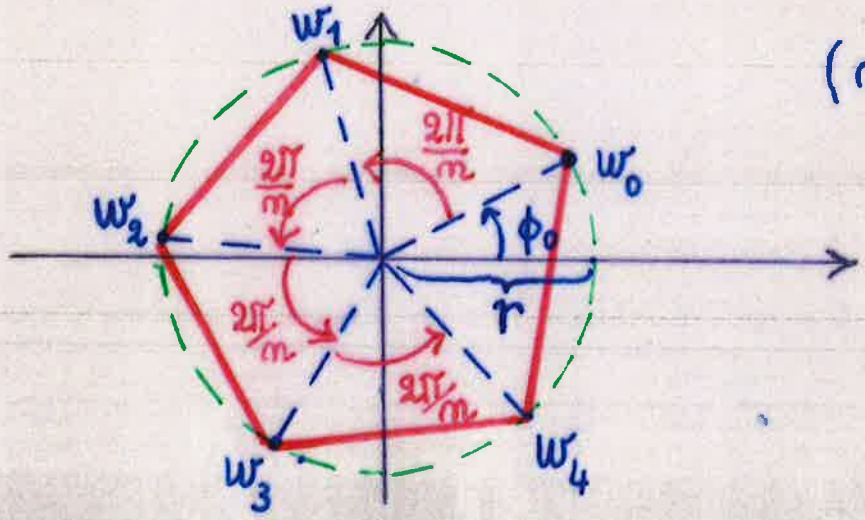
Infatti

$$w_k^n = (\sqrt[n]{\rho} e^{i(\vartheta+2k\pi)/n})^n = \rho e^{i(\vartheta+2k\pi)} = \rho e^{i\vartheta} = z.$$

Teorema. *Ogni numero complesso non nullo ha esattamente n radici n-esime distinte.*

Nel piano complesso, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro 0 e raggio r. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{2\pi i/n}$, cioè con una rotazione di $2\pi/n$.

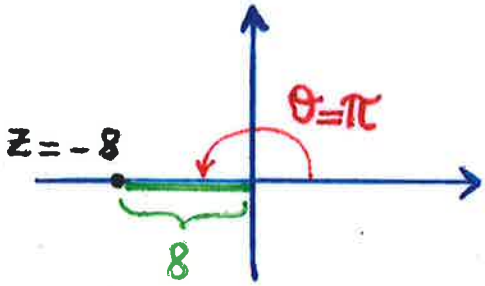
($n=5$)



Estrazione di radice in $\mathbb{C}$: un esempio

Determiniamo le radici cubiche di $z = -8$ in $\mathbb{C}$.
Forma trigonometrica/esponenziale di -8:

$z = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8e^{i\pi}$.



- In $\mathbb{R}$, -8 ha una radice cubica: -2
- In $\mathbb{C}$, -8 ha tre radici cubiche distinte
- $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$ è una radice cubica di -8 se e solo se:

$$w^3 = 8e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{i3\phi} = 8e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow$$

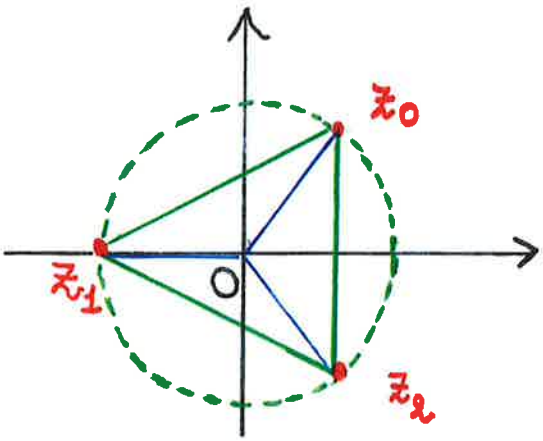
$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\phi = \pi + 2k\pi\,, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \phi_k = \dfrac{\pi}{3} + 2k\dfrac{\pi}{3}\,, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

Le uniche radici cubiche distinte sono:

$$k=0: \quad z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k=1: \quad z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi} = -2$$

$$k=2: \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$



Le uniche radici cubiche distinte sono:

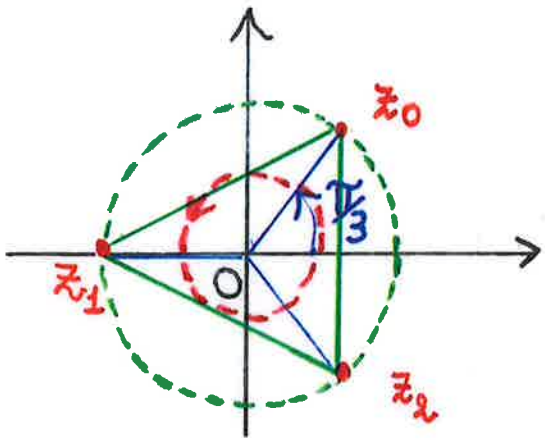
$$k=0: \quad z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k=1: \quad z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi} = -2$$

$$k=2: \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$

$K=3$

$$\phi_3 = \frac{\pi}{3} + 2\cdot 3\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$$



Risolubilità delle equazioni algebriche in $\mathbb{C}$. Casi particolari

1) L'*equazione di 2° grado con discriminante negativo* e coefficienti reali:

$$\boxed{P(z) = az^2 + bz + c = 0\,, \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac < 0\,,}$$

ammette in $\mathbb{C}$ *due soluzioni complesse coniugate*:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z}_1$$

2) Le radici $n-$me complesse di un numero $w \in \mathbb{C}$ diverso da zero, con n intero ≥ 2, sono i numeri complessi z tali che $z^n = w$, cioè sono *soluzioni dell'equazione algebrica di grado n*

$$\boxed{P(z) = z^n - w = 0\,.}$$

Come è noto, tali radici sono *n numeri complessi distinti.*

Polinomi in campo complesso

Def. Si dice *polinomio in una variabile* la funzione $P : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}$ data da

$$\boxed{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \qquad (**)}$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono numeri complessi assegnati detti *coefficienti* del polinomio.

Se $a_n \neq 0$, allora si dice che il polinomio è di grado n.

Si chiama *radice* di P ogni numero complesso w tale che $P(w) = 0$. (cioè w è soluzione dell'equazione $P(z)=0$)

Proposizione. *(Principio di identità dei polinomi)*
Siano P e Q due polinomi: essi sono uguali (nel senso dell'uguaglianza tra funzioni) se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.

Teorema. *Sia w una radice del polinomio P, di grado n. Allora esiste un unico polinomio Q di grado $n-1$ tale che*

$$\boxed{P(z) = (z-w)Q(z), \qquad \forall z \in \mathbf{C}.}$$

Teorema. *(Teorema fondamentale dell'Algebra) Ogni polinomio ha (in $\mathbf{C}$) almeno una radice.*

N.B. NON vale in $\mathbb{R}$!!
Es: $z^2+1=0$ in $\mathbb{R}$ non ha radici.
$z=\pm i$ sono le radici complesse.

Corollario. *Ogni polinomio ha (in $\mathbf{C}$) esattamente tante radici quanto è il grado e si può fattorizzare come prodotto*

$$\boxed{P(z) = a_n(z-w_1)(z-w_2)\dots(z-w_n),}$$

dove $w_1, w_2, \dots, w_n$ sono le radici.

Dim. Sia P il polinomio, dato da (**). Per il teorema fondamentale, esiste almeno una radice $w_1 \in \mathbf{C}$; per il teorema precedente allora $P(z) = (z-w_1)Q_1(z)$, dove Q_1 è un polinomio di grado $n-1$ (unico). Applicando a Q_1 lo stesso ragionamento si trovano $w_2 \in \mathbf{C}$ e un (unico) polinomio Q_2 di grado $n-2$ tali che $Q_1(z) = (z-w_2)Q_2(z)$ da cui

$$P(z) = (z-w_1)(z-w_2)Q_2(z).$$

Se $m = 3$

$$P(z) = (z - w_1)\underbrace{Q_1(z)}_{gr\ 2}$$

$$Q_1(z) = (z - w_2)\underbrace{Q_2(z)}_{gr.\ 1}$$

$$Q_2(z) = (z - w_3)\overbrace{\underbrace{Q_3(z)}_{gr\ 0}}^{=K}$$

$$P(z) = K(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)$$

Procedendo così n volte si trovano n radici w_i, $i = 1, \ldots, n$, e un polinomio di grado 0 (costante) K, tali che

$$P(z) = K(z - w_1)(z - w_2) \ldots (z - w_n).$$

Per il principio di identità dei polinomi, $K = a_n$. $\square$

Osservazione. Le radici di cui al Corollario possono non essere tutte distinte. Se raggruppiamo le radici in modo da mettere in una stessa classe tutte quelle uguali fra loro e denotiamo con μ_j (molteplicità) il numero di elementi della classe contenente la radice r_j, troviamo che, se $r_1, r_2, \ldots, r_d$ sono le radici distinte, la somma $\mu_1 + \ldots + \mu_d$ vale n= grado di P. $P(z) = a_n (z - r_1)^{\mu_1} \cdots (z - r_d)^{\mu_d}$.

ESEMPI: 1) $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ ($z_1 = i$, $z_2 = -i$); 2) $z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1) = z \cdot z \cdot z(z - i)(z + i)$ ($z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$. 0 ha *molteplicità* 3).

OSSERV. P polinomio di grado n

$w \in \mathbb{C}$ radice di P ($P(w) = 0$)

w ha molteplicità μ $\iff$ $P(z) = (z - w)^{\mu} Q(z)$

($\mu \in \mathbb{N}$; $1 \leq \mu \leq n$) e $Q(w) \neq 0$

(Q polinomio di gr. $n - \mu$)

Proposizione. *Si consideri un polinomio a coefficienti reali. Se w è una radice (non reale), anche $\overline{w}$ è una radice, con la stessa molteplicità. In particolare, se il grado del polinomio è dispari, vi è almeno una radice reale.* P di 3º gr., a coeff. in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ radici reali} \\ 1 \text{ radice reale (e 2 compl. coniug.)} \end{cases}$

Dim. Se il polinomio P ha coefficienti reali, si verifica facilmente che $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Se w è una radice, allora $0 = P(w) = \overline{P(w)} = P(\overline{w})$, dunque anche $\overline{w}$ è una radice. Circa la molteplicità, poiché le radici non reali devono viaggiare in coppia, e il totale delle radici (contate con la loro molteplicità) deve dare il grado del polinomio, se vi sono solo radici non reali, allora il grado è pari. $\square$

Corollario. Se P è a coeff. in $\mathbf{R}$, allora P si può scrivere come prodotto di fattori a coeff. reali di grado non superiore a 2 (Basta notare che $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = (z - \operatorname{Re}\alpha - i\operatorname{Im}\alpha)(z - \operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha) = \big((z-\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2\big) = z^2 - \underbrace{2(\operatorname{Re}\alpha)}_{\in\mathbb{R}} z + \underbrace{(\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2}_{\in\mathbb{R}}$

$$P(z) = a_m (z-c_1)\dots(z-c_h)\underbrace{(z-\alpha_1)(z-\overline{\alpha}_1)}\dots\underbrace{(z-\alpha_k)(z-\overline{\alpha}_k)}$$

Es. $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$

radici: $1, \pm i$ $\qquad P(z) = (z-1)\underbrace{(z-i)(z+i)} = (z-1)(z^2+1)$