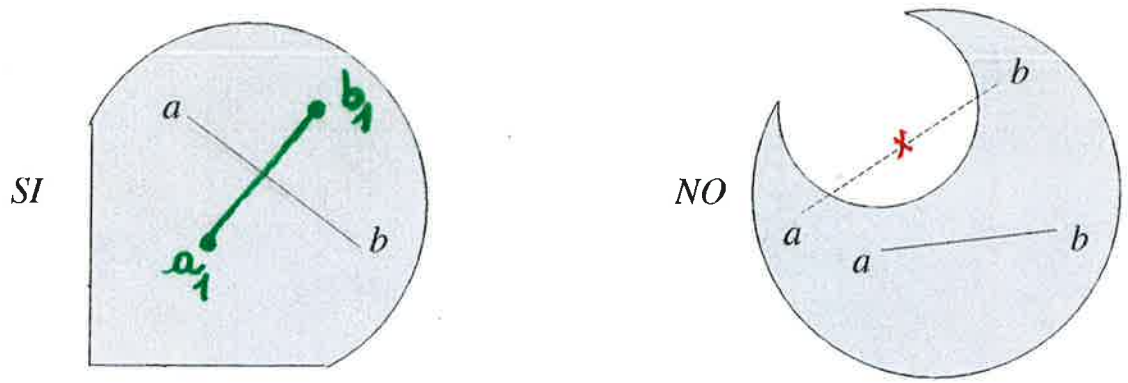
FUNZIONI CONVESSE

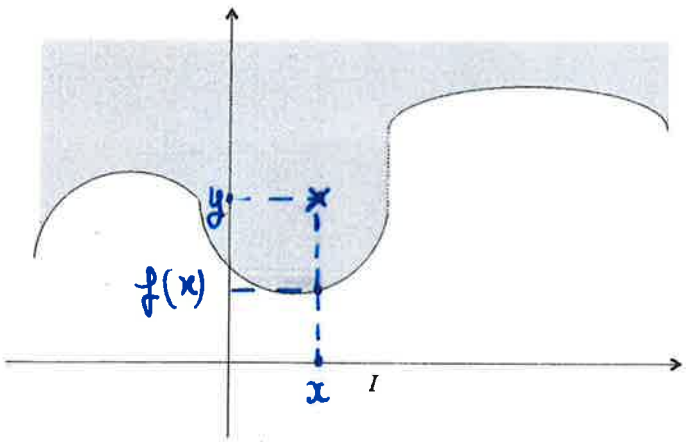
Def. $A \subseteq \mathbf{R}^2$ è un *insieme convesso* se $\forall\ a, b \in A$ il segmento che li congiunge è tutto contenuto in A.



$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

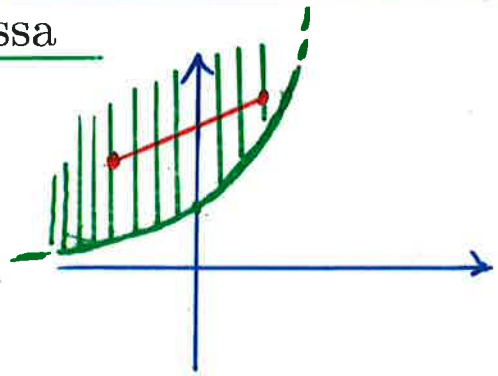
Def. Data $f : I \to \mathbf{R}$, si dice *Epigrafico di f*

$Epi(f) := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : x \in I,\ y \geq f(x)\}$



Def. f è *convessa* $\iff$ $Epi(f)$ è un insieme convesso

f è *concava* $\iff$ $-f$ è convessa



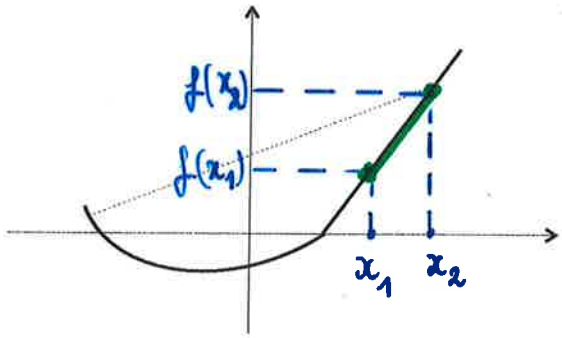
ESEMPIO : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = e^x$

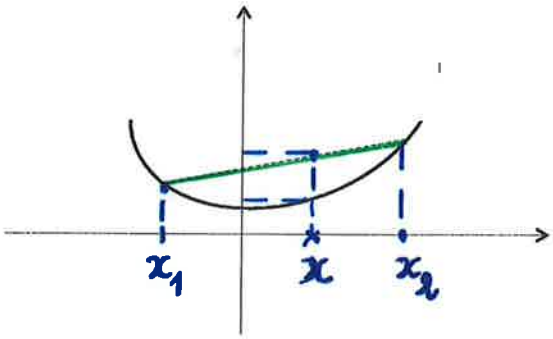
f è convessa

f è convessa $\iff \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è al di sopra del grafico di f $(\geq)$

f è *strettamente convessa* $\iff \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è strettamente al di sopra del grafico di f $(>)$

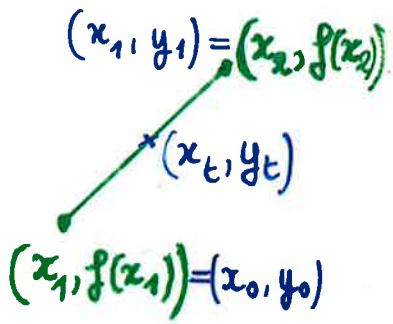


convessa



strettamente convessa

Il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha equazioni parametriche

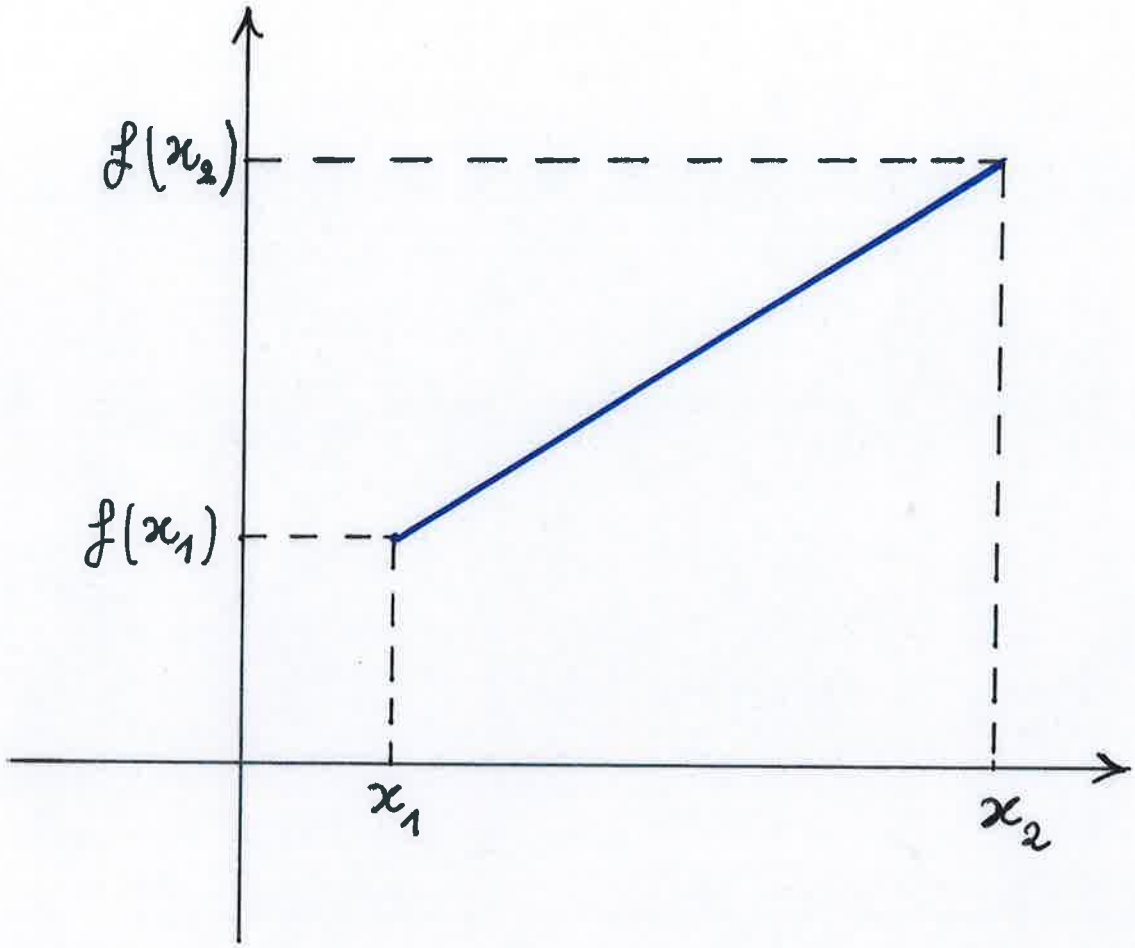


$$\boxed{\begin{cases} x_t = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y_t = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \end{cases}}$$

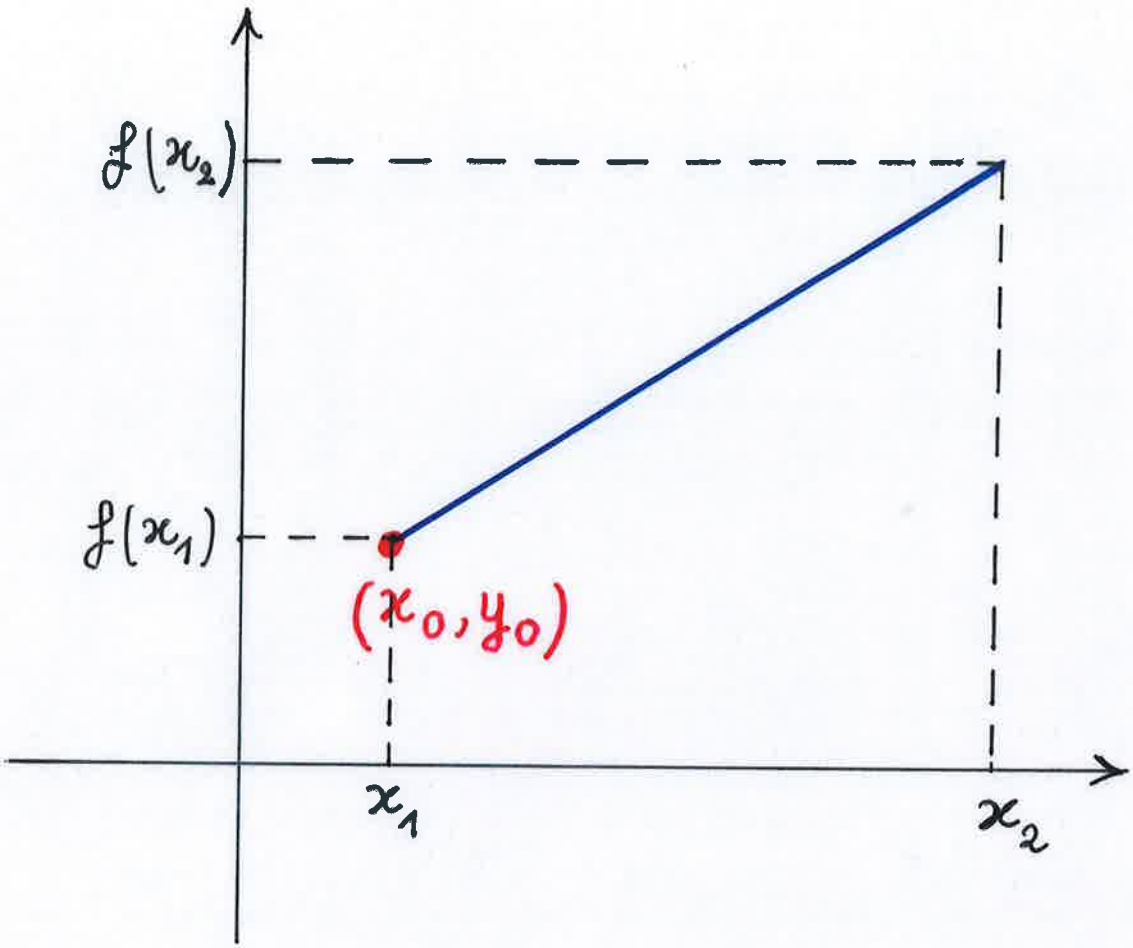
con $t \in [0, 1]$.

f è convessa $\iff y_t \geq f(x_t) \quad \forall t \in [0, 1]$

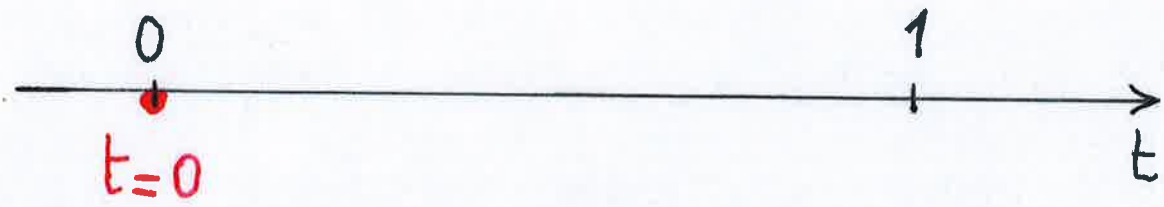
f è strettamente convessa $\iff y_t > f(x_t) \quad \forall t \in]0, 1[$

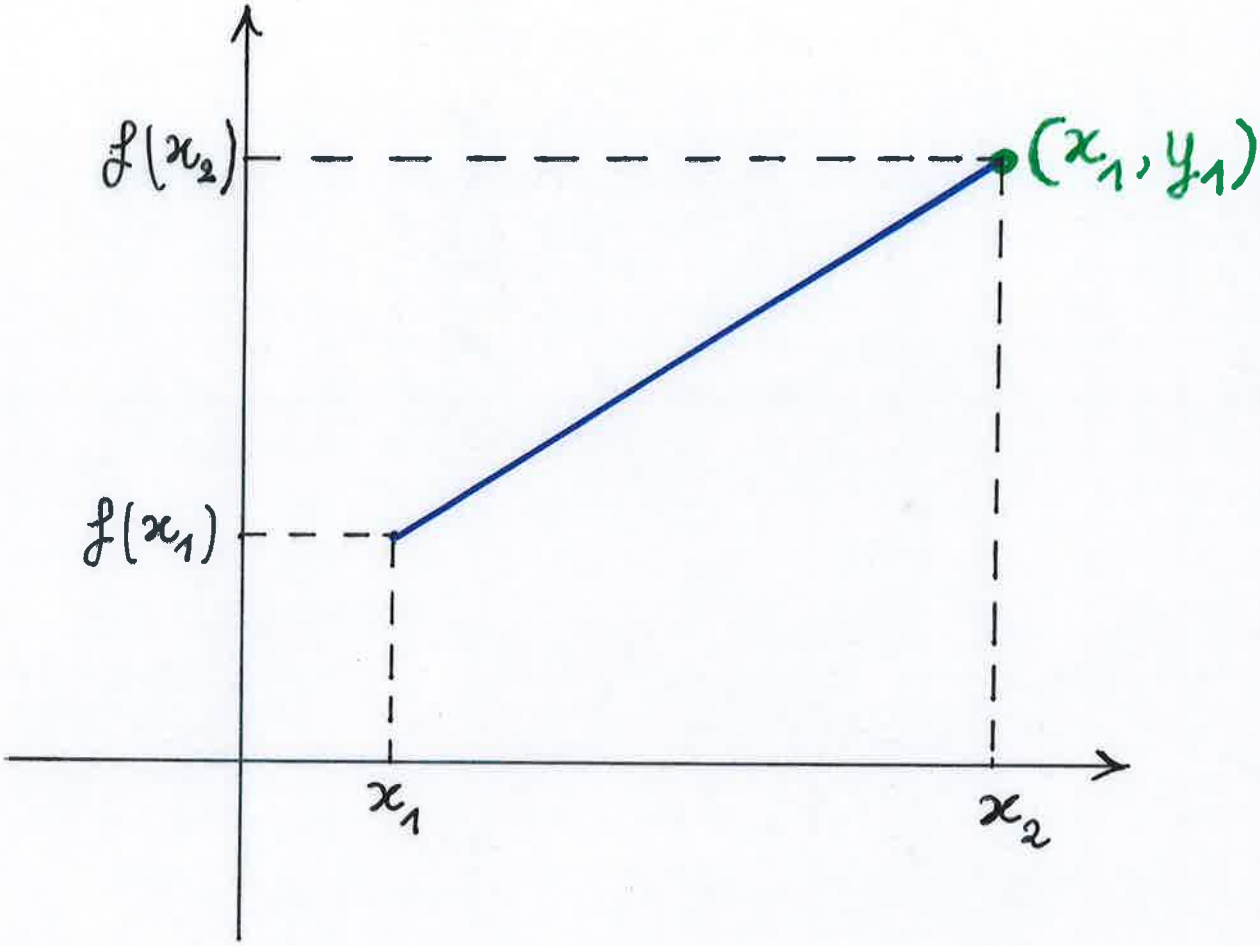


$$\begin{cases} x_t = (1-t)\,x_1 + t\,x_2 \\ y_t = (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \end{cases}$$

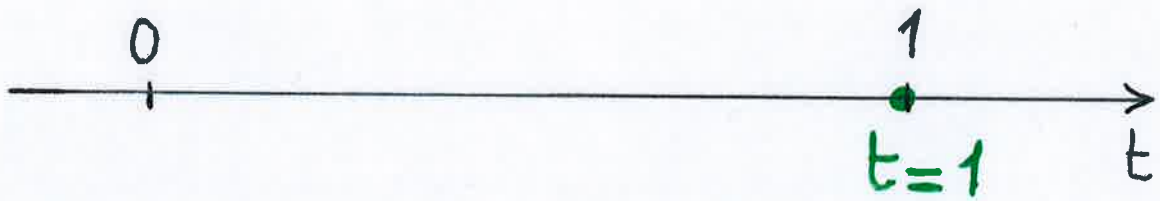


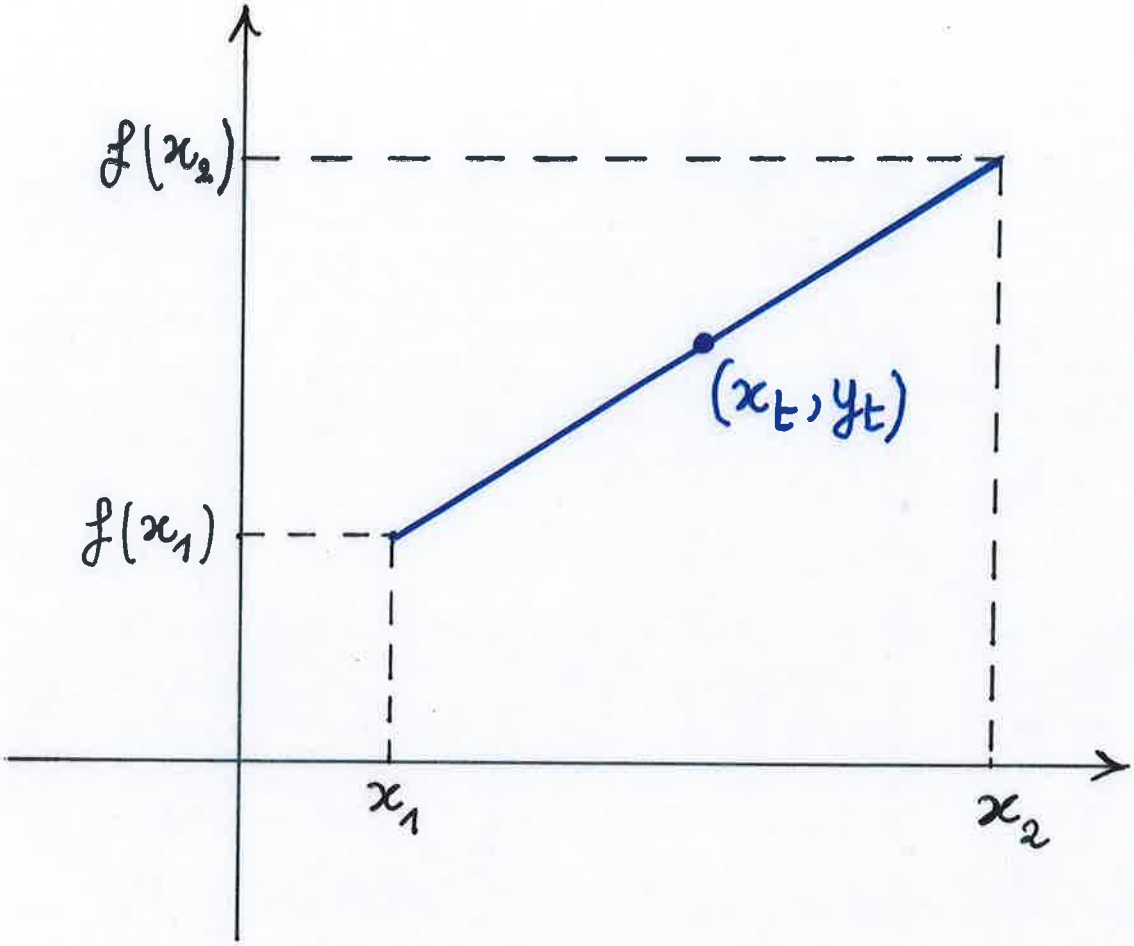
$$\begin{cases} x_t = (1-t)\,x_1 + t\,x_2 \\ y_t = (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = f(x_1) \end{cases}$$



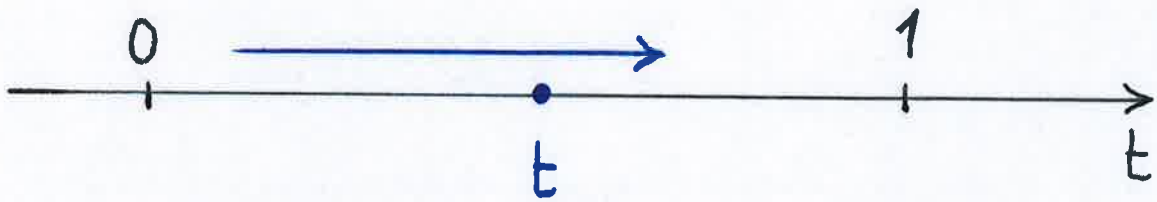


$$\begin{cases} x_t = (1-t)\,x_1 + t\,x_2 \\ y_t = (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \end{cases} \xrightarrow{t=1} \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = f(x_2) \end{cases}$$

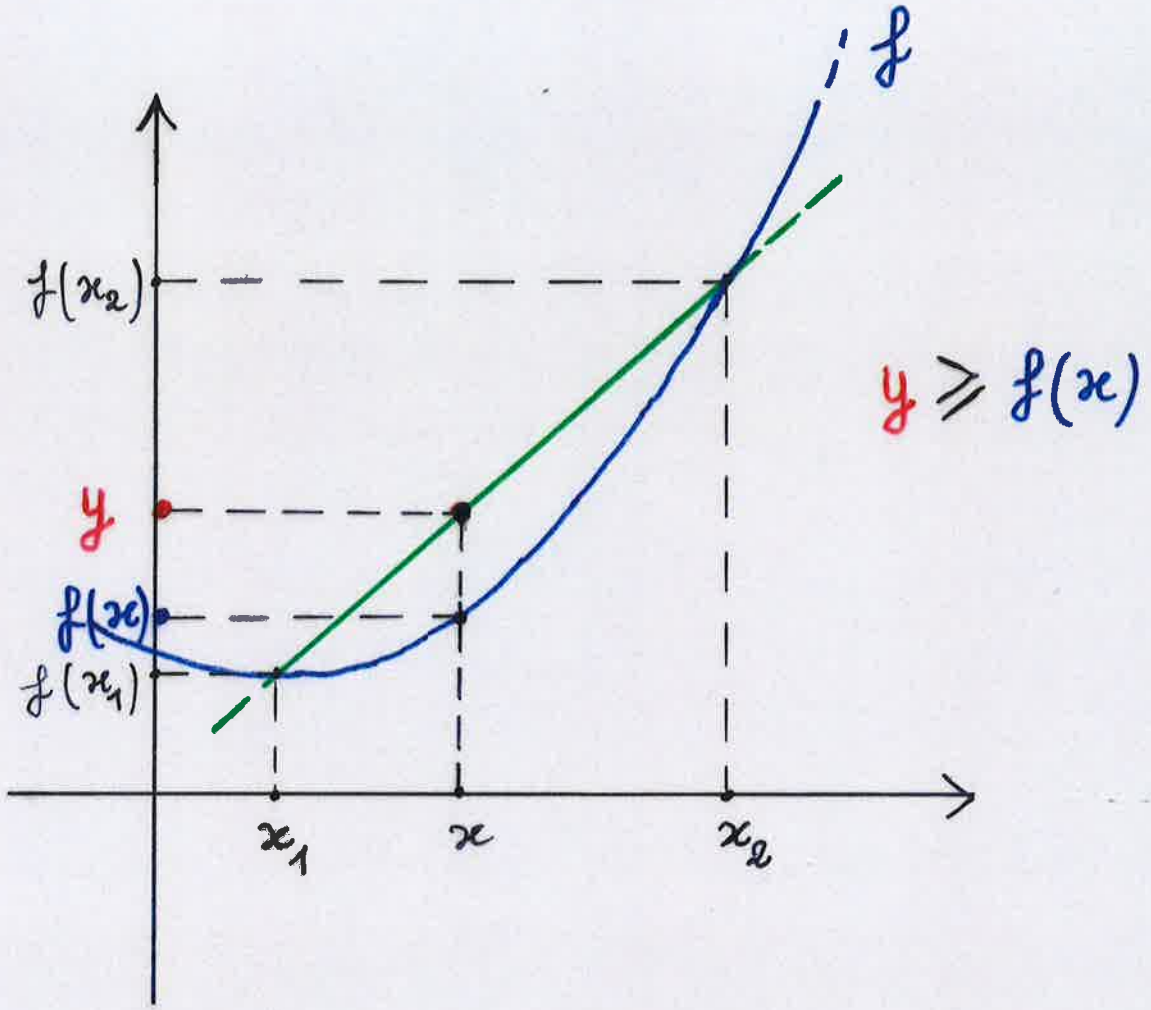




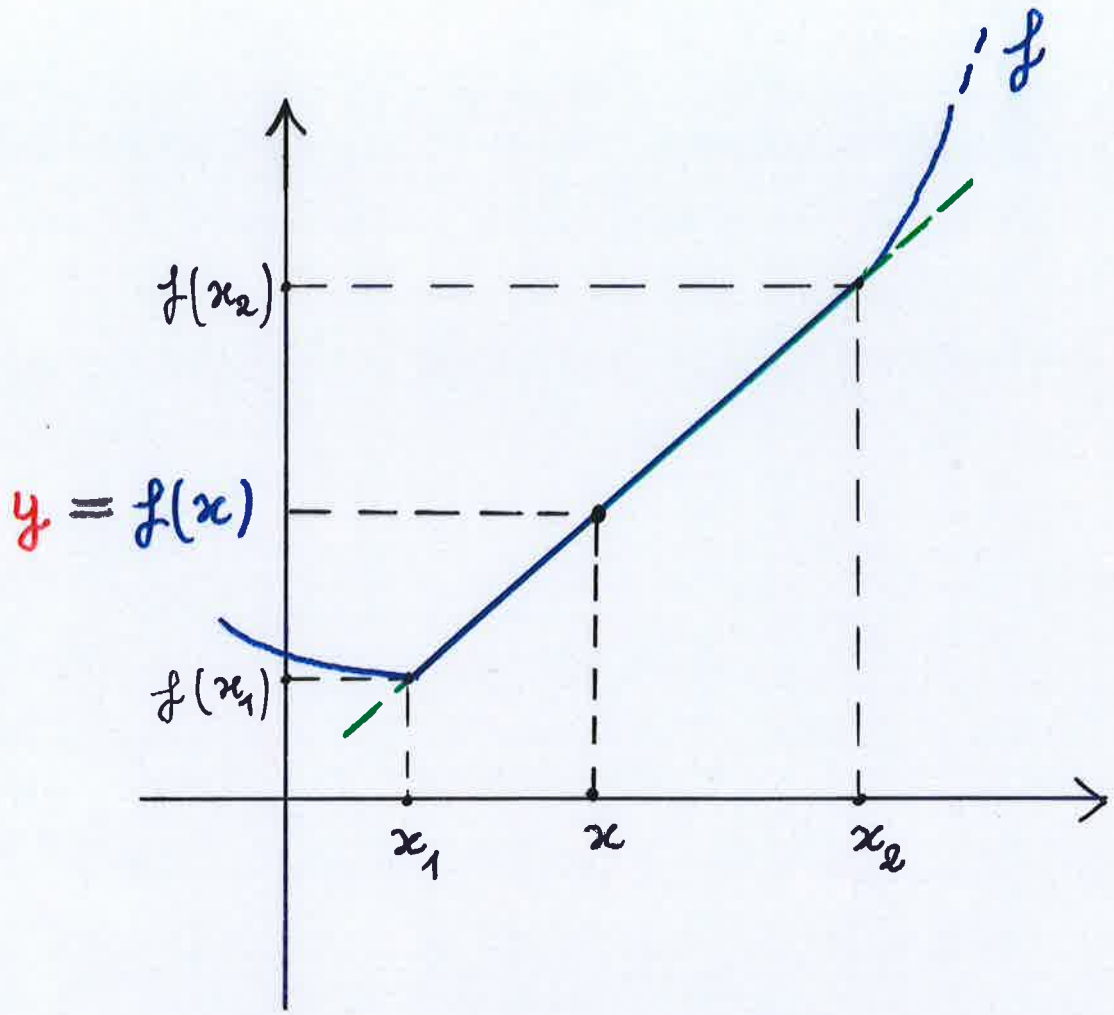
$$\begin{cases} x_t = (1-t)\,x_1 + t\,x_2 \\ y_t = (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \end{cases}$$



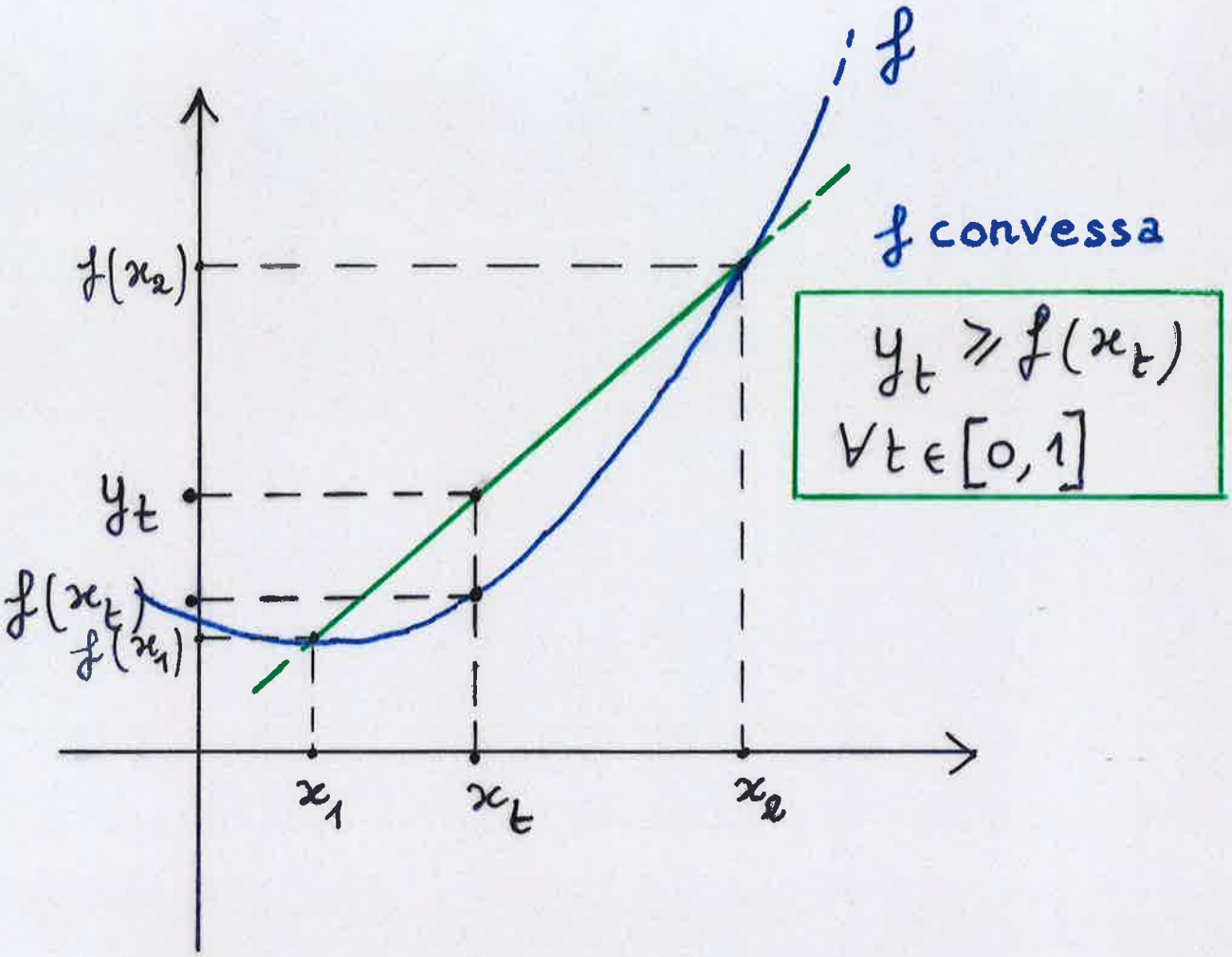
FUNZIONI CONVESSE



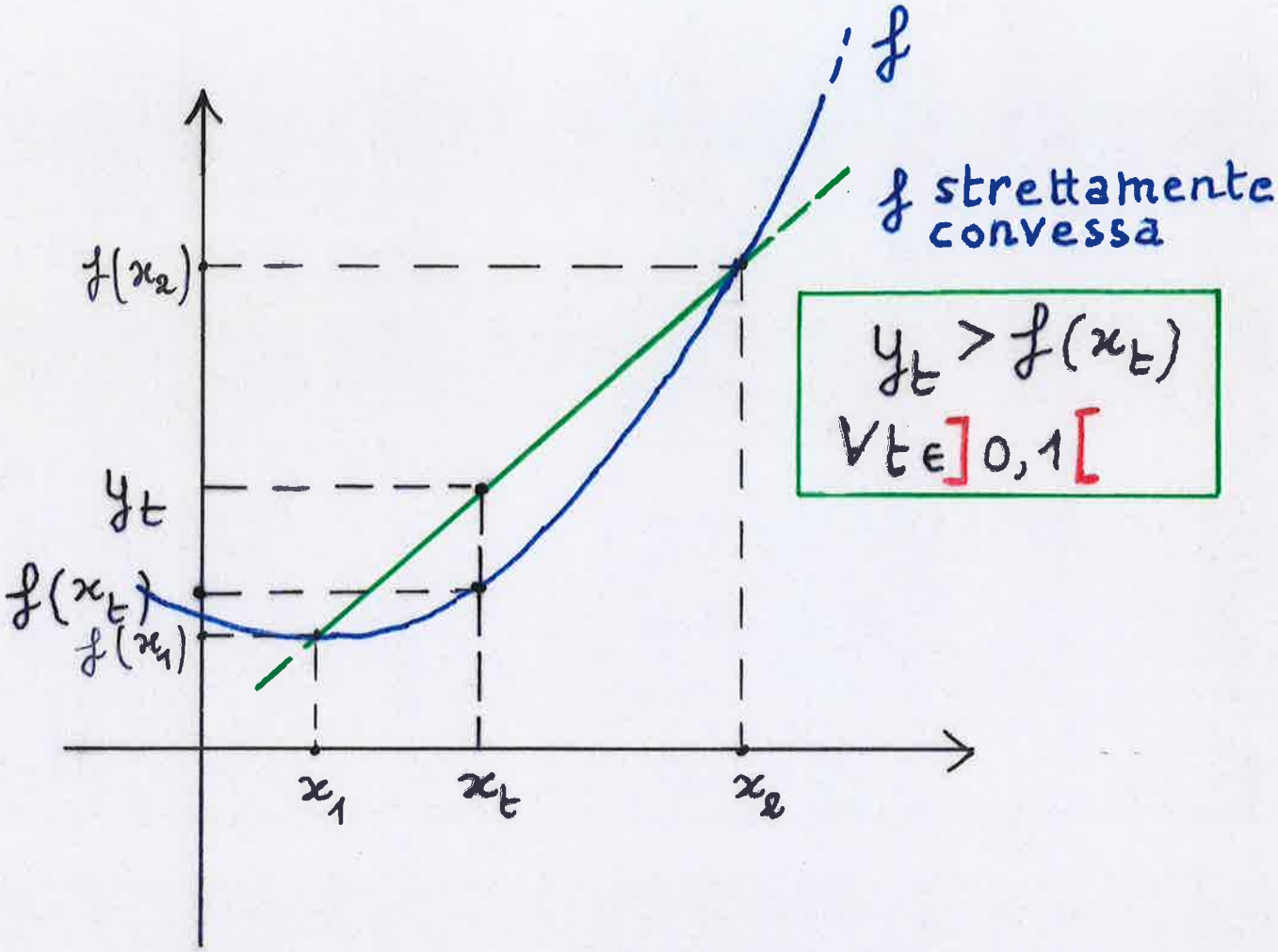
FUNZIONI CONVESSE



FUNZIONI CONVESSE



FUNZIONI CONVESSE



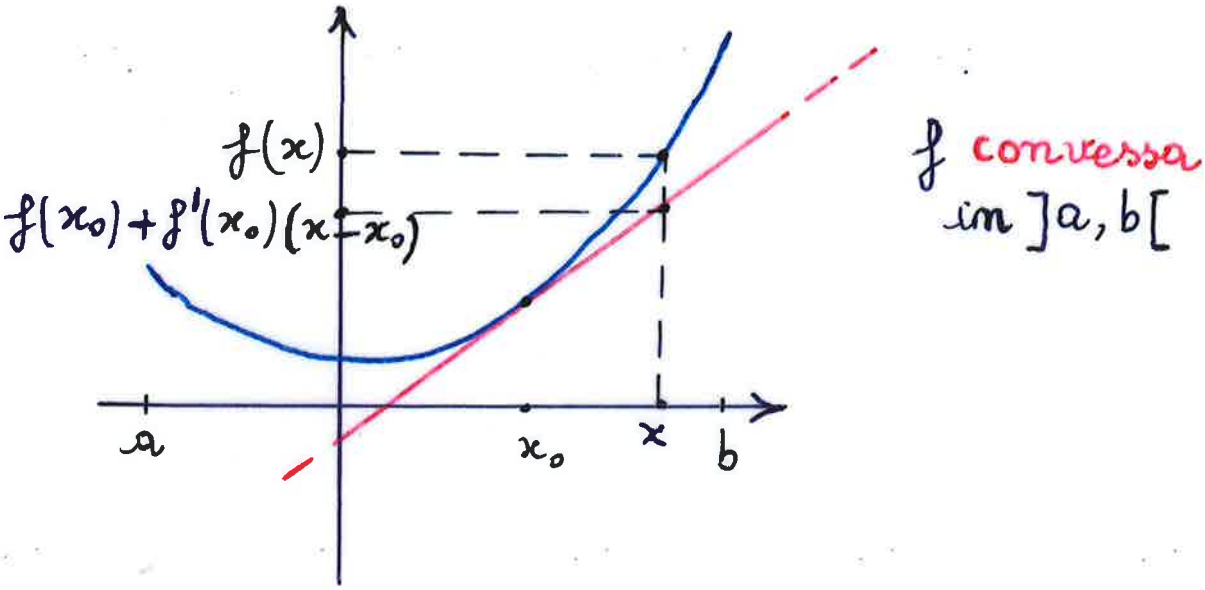
$$\boxed{\begin{array}{l} y_t > f(x_t) \\ \forall t \in]0,1[\end{array}}$$

FUNZIONI CONVESSE/CONCAVE E RETTA TANGENTE

Teorema. Una funzione $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, derivabile in $]a,b[$, è convessa (concava) in $]a,b[$ se e solo se $\forall\, x_0 \in]a,b[$ si ha che il grafico di f si mantiene in tutto $]a,b[$ sopra (sotto) la sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$, cioè:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)), \qquad \forall\, x \in]a,b[.$$

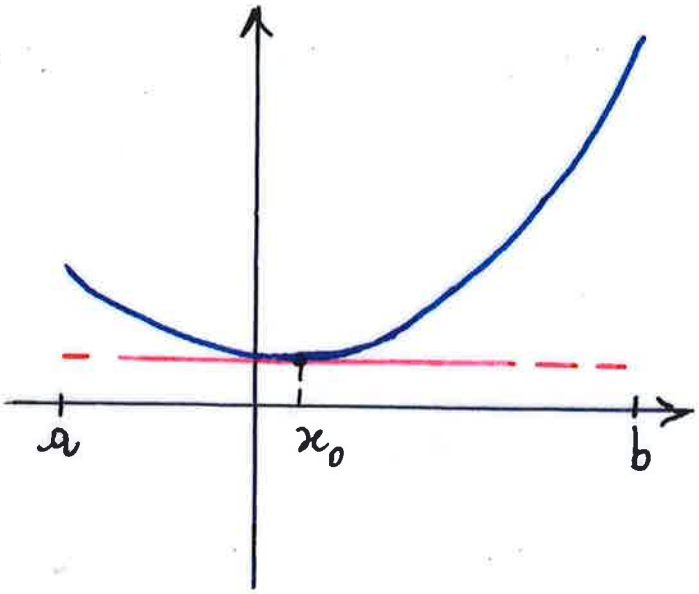


FUNZIONI CONVESSE/CONCAVE E RETTA TANGENTE

Teorema. Una funzione $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, derivabile in $]a,b[$, è convessa (concava) in $]a,b[$ se e solo se $\forall\, x_0 \in]a,b[$ si ha che il grafico di f si mantiene in tutto $]a,b[$ sopra (sotto) la sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$, cioè:

$$f(x) \geq f(x_0) + \cancel{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$(f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)), \qquad \forall\, x \in]a,b[.$$



Se f è convessa e derivabile in $]a,b[$ e se $f'(x_0)=0$ allora

$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in]a,$

(cioè x_0 è punto di min. assoluto per f)

OSSERVAZIONE: Sia x_0 un punto stazionario. Allora $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \neq x_0$ quindi $x_0 = \min_{]a,b[} f(x)$ cioè x_0 è un punto di minimo assoluto.

Teorema Sia $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ derivabile. Allora
(1) f convessa (concava) $\iff$ f' crescente (decrescente)
(2) se f è derivabile due volte allora
f convessa (concava) $\iff$ $f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$ $\forall x \in]a, b[$.

Dim.
(1) $x < z_1 < z_2 < y \quad rf(z_1, x) \leq rf(y, x) \leq rf(z_2, y)$
$z_1 \to x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \leq rf(y, x) \leq rf(z_2, y)$
$z_2 \to y \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \leq rf(y, x) \leq f'(y)$.
Il viceversa segue dal teorema del valor medio.

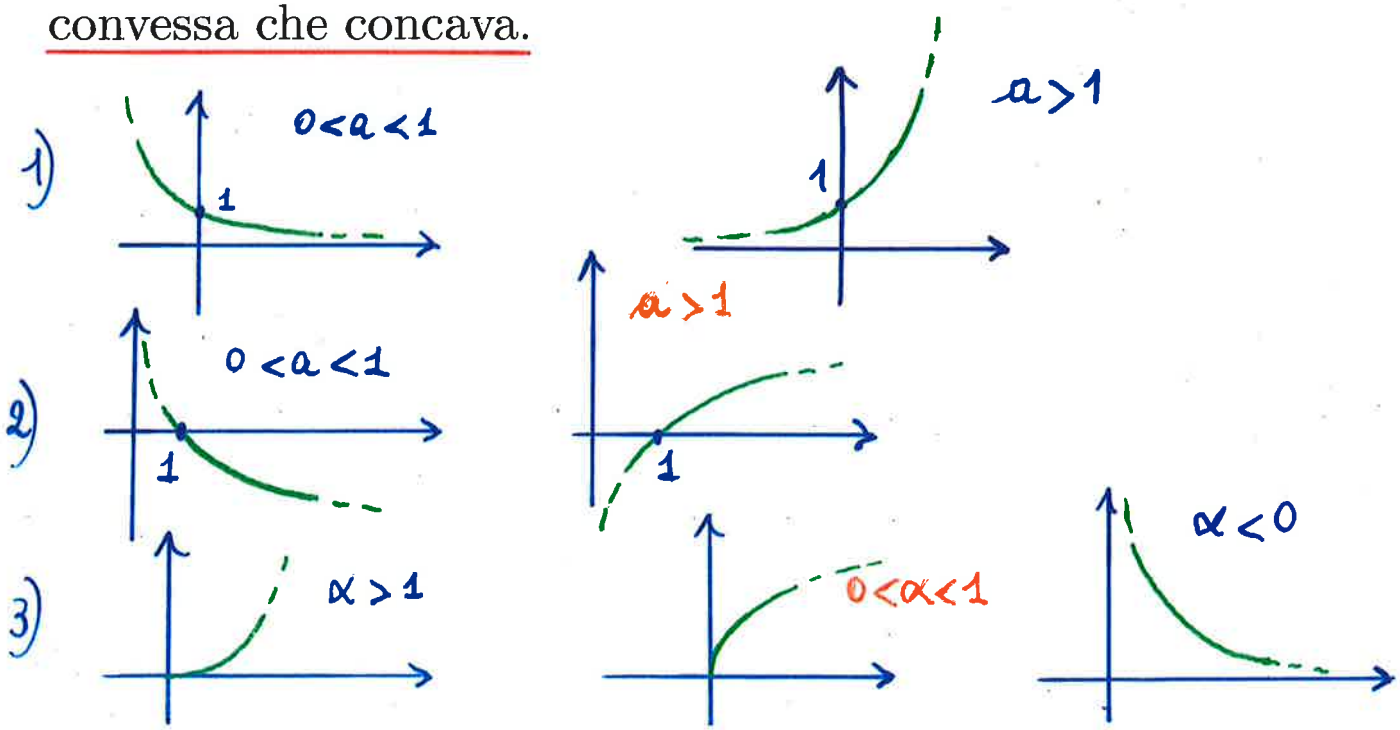
(2) segue da (1). $\square$

ESEMPI:

1) $f(x) = a^x$, dove $a > 0$, $a \neq 1$.
Allora $f'(x) = a^x \log a$ e $f''(x) = a^x (\log a)^2 > 0 \quad \forall x$.
Quindi f è strettamente convessa.

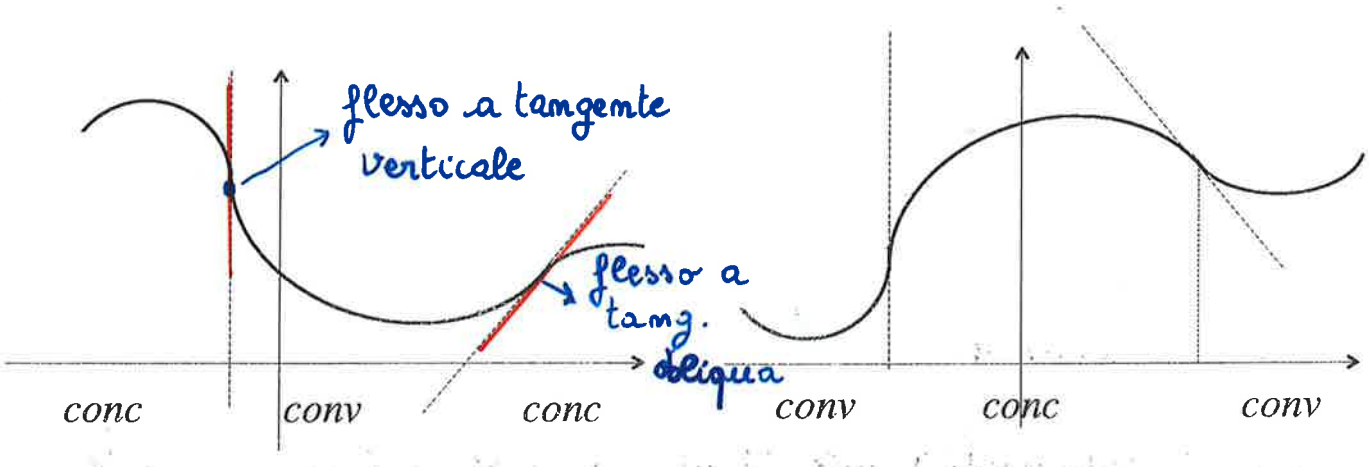
2) $f(x) = \log_a x$, dove $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$.
Allora $f'(x) = \dfrac{1}{x \log a}$ e $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2 \log a}$.
Quindi se $0 < a < 1$ $\log a < 0$ $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$ e f è strettamente convessa.
Se $a > 1$ $\log a > 0$ $f''(x) < 0 \ \forall x > 0$ e f è strettamente concava.

3) $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbf{R}$ e $x > 0$.
Allora $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$.
Quindi se $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$ $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$ e f è strettamente convessa.
Se $0 < \alpha < 1$ $f''(x) < 0 \ \forall x > 0$ e f è strettamente concava.
Se $\alpha = 0$ $f(x) = 1$, se $\alpha = 1$ $f(x) = x$ cioè f è sia convessa che concava.



Siano $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ e $x_0 \in]a, b[$. Sia f derivabile in x_0 oppure tale che $f'(x_0) = \pm\infty$.

Def. x_0 è *punto di flesso* per f se esiste un intorno destro di x_0 nel quale f è convessa (concava) ed esiste un intorno sinistro di x_0 nel quale f è concava (convessa).



Se esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$.
La condizione è necessaria ma non sufficiente.

ESEMPIO: $f(x) = x^4$. Si ha $f'(0) = f''(0) = 0$ e $x_0 = 0$ è punto di minimo, non di flesso.