PROPRIETÀ DEGLI "o PICCOLO"

Si riportano qui alcune proprietà degli "o piccolo", utili nel calcolo dei limiti di funzione attraverso gli sviluppi di Taylor.
In tutte le formule che seguono, si suppone:

$$x \to x_0\,, \qquad x_0 \in \mathbb{R}.$$

1. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[,\ h < k$:

$$f(x) = o\left((x - x_0)^k\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = o\left((x - x_0)^h\right)\,,$$

In particolare: $(x - x_0)^k = o\left((x - x_0)^h\right)$;

2. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left((x - x_0)^h\right) + o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{\min\{h,k\}}\right)\,;$$

3. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$(x - x_0)^h \cdot o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{h+k}\right) ,$$

$$o\left((x - x_0)^h\right) \cdot o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^{h+k}\right) ;$$

4. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$\left(o(x - x_0)^k\right)^h = o\left((x - x_0)^{kh}\right) ;$$

5. $\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$c \cdot o\left((x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^k\right) ,$$

$$o\left(c \cdot (x - x_0)^k\right) = o\left((x - x_0)^k\right) ;$$

6. $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left((x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right)\right) = o\left((x - x_0)^k\right) .$$

Analoghe formule valgono per $x \to +\infty$, quando le quantità del tipo $o((x-x_0)^k)$ sono sostituite da quantità del tipo $o(x^{-k})$ con $k \in [0, +\infty[$. Abbiamo quindi per $x \to +\infty$:

7. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[,\ h < k$:

$$f(x) = o\left(x^{-k}\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = o\left(x^{-h}\right) ,$$

In particolare: $x^{-k} = o\left(x^{-h}\right)$;

8. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left(x^{-h}\right) + o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-\min\{h,k\}}\right) ;$$

9. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$x^{-h} \cdot o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-(h+k)}\right) ,$$

$$o\left(x^{-h}\right) \cdot o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-(h+k)}\right) ;$$

10. $\forall\, h, k \in [0, +\infty[$:

$$\left(o(x^{-k})\right)^h = o\left(x^{-kh}\right) \ ;$$

11. $\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$c \cdot o\left(x^{-k}\right) = o\left(x^{-k}\right) \ ,$$

$$o\left(c \cdot x^{-k}\right) = o\left(x^{-k}\right) \ ;$$

12. $\forall\, k \in [0, +\infty[$:

$$o\left(x^{-k} + o\left(x^{-k}\right)\right) = o\left(x^{-k}\right) \ .$$

Formule analoghe alle $7 - 12$ valgono per $x \to -\infty$, se tutte le quantità $o(x^{-k})$, con $k \in [0, +\infty[$, sono sostituite dalle quantità $o((-x)^{-k})$.

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^2} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

3) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - x^2\cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

e anche

$$x^2\cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^2} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

3) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - x^2 \cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3) \longleftarrow z = x^2$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$\boxed{\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)}$$

e anche

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^2} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

3) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - x^2\cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$\times x^2$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

e anche

$$\boxed{x^2\cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).}$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^2} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

3) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - x^2\cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$\boxed{\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)}$$

e anche

$$\boxed{x^2\cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).}$$

$$\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6)}$$

Quindi si ha

$$f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + o(x^6),$$

e dunque

$$T^6 f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)x^6 = \frac{7}{24}x^6.$$

4) Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1 + x^2)}{7x^2 \tan(x^4)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$\Rightarrow \tan x^4 \sim x^4$

$\Rightarrow 7x^2 \tan x^4 \sim$

$\sim 7x^6$

per $x \to 0$

il limite è uguale a

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1 + x^2)}{7x^6}.$$

Per l'esempio 3) si ha quindi

$$L = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{7x^6}\left(-\frac{7}{24}x^6 + o(x^6)\right) = -\frac{1}{24}.$$

QUALCHE APPLICAZIONE DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR NEL CALCOLO DI LIMITI

Esercizio 1. Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(e^{x^2}-1-x^2\right)}{3x^4}.$$

A priori il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sostituiamo alla funzione $f(x) = 2\sin\left(e^{x^2}-1-x^2\right)$ un suo sviluppo di Taylor con centro in $x_0 = 0$. Ponendo nella formula

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^2)\,, \quad y \to 0\,,$$

$y = x^2$ (si osservi che $y = x^2 \to 0$ quando $x \to 0$) otteniamo

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,$$

da cui si trova che

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right), \quad x \to 0\,.$$

Ponendo nella formula di Taylor

$$\sin z = z + o(z)\,, \quad z \to 0\,,$$

$z = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ (si osservi che $z \to 0$ quando $x \to 0$), otteniamo

$$f(x) = 2\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4) + \overbrace{o\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)}^{o(x^4)}\right)$$

$$= x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.$$

La formula precedente fornisce lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x)$ con centro in $x_0 = 0$.

Usando tale formula nel calcolo del limite si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(e^{x^2}-1-x^2\right)}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+o(x^4)}{3x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(1+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{3x^4} = \frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 2. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} 6n^\alpha \left(\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2}\right).$$

Ponendo nella formula di Taylor

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4), \quad y \to 0,$$

$y = \frac{1}{n}$ (si noti che $y = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$), si ottiene

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \to +\infty,$$

da cui si deduce che

$$\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \frac{1}{4!n^4}\left(1 + 4!n^4 o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \sim \frac{1}{4!n^4}, \quad n \to +\infty.$$

Esercizio 2. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} 6n^\alpha \left(\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2}\right).$$

Ponendo nella formula di Taylor

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4), \quad y \to 0,$$

$y = \frac{1}{n}$ (si noti che $y = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$), si ottiene

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \to +\infty,$$

da cui si deduce che

$$\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \frac{1}{4!n^4}\left(1 + \overbrace{4!n^4 o\left(\frac{1}{n^4}\right)}^{\to 0}\right) \sim \frac{1}{4!n^4}, \quad n \to +\infty.$$

Utilizzando la valutazione asintotica precedente nel calcolo del limite troviamo

$$\lim_{n\to\infty} 6n^\alpha \left(\cos\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^\alpha}{4!n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-4}}{4} = \begin{cases} +\infty\,, & \text{se } \alpha > 4\,, \\ \frac{1}{4}\,, & \text{se } \alpha = 4\,, \\ 0\,, & \text{se } \alpha < 4\,. \end{cases}$$

SVILUPPI DI TAYLOR NEL CALCOLO DEI LIMITI DI FUNZIONE

Negli sviluppi di Taylor è importante riportare sempre il resto!
Consideriamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right]}{3(\sinh x^2 - \sin^2 x)}\,.$$

Effettuando la sostituzione $y = x^2$ (si ha $y \to 0$ quando $x \to 0$) nella formula di Taylor

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^4)\,, \quad y \to 0\,,$$

e usando anche

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,$$

otteniamo per il denominatore lo sviluppo

$$
\begin{aligned}
&3(\sinh x^2 - \sin^2 x) \\
&\quad = 3\left(x^2 + \tfrac{x^6}{6} + o(x^8) - (x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4))^2\right) \\
&\quad = \cancel{3}\Big(\cancel{x^2} + \overbrace{\tfrac{x^6}{3!} + o(x^8)}^{o(x^5)} - \cancel{x^2} - \overbrace{\tfrac{x^6}{36}}^{o(x^5)} + \tfrac{x^4}{\cancel{3}} + \underline{\underline{o(x^5)}}\Big) \\
&\quad = x^4 + o(x^5) = x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Questa formula ci dice che il denominatore tende a zero come un infinitesimo di ordine 4 (il denominatore "tende a zero come x^4 per $x \to 0$"); pertanto, nello sviluppo di Taylor che sostituiremo al numeratore, dovremo progredire nella sequenza delle potenze di x *almeno fino allo stesso ordine* 4.
Nel numeratore, facciamo uso della formula di Taylor

$$\log(1+z) = z + o(z)\,, \quad z \to 0\,, \tag{1}$$

con $z = x + 3x^2$. Se nella formula che si ricava effettuando in (1) la sostituzione predetta non riportiamo il resto, otterremmo per il numeratore la

otteniamo per il denominatore lo sviluppo

$$
\begin{aligned}
&3(\sinh x^2 - \sin^2 x) \\
&\quad = 3\left(x^2 + \tfrac{x^6}{6} + o(x^8) - (x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4))^2\right) \\
&\quad = \cancel{3}\Big(\cancel{x^2} + \overbrace{\tfrac{x^6}{3!} + o(x^8)}^{o(x^5)} - \cancel{x^2} - \overbrace{\tfrac{x^6}{36}}^{o(x^5)} + \cancel{\tfrac{x^4}{3}} + \underline{\underline{o(x^5)}}\Big) \\
&\quad = x^4 + o(x^5) = x^4 + o(x^4)\,, \qquad x \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Questa formula ci dice che il denominatore tende a zero come un infinitesimo di ordine 4 (il denominatore "tende a zero come x^4 per $x \to 0$"); pertanto, nello sviluppo di Taylor che sostituiremo al numeratore, dovremo progredire nella sequenza delle potenze di x *almeno fino allo stesso ordine* 4.
Nel numeratore, facciamo uso della formula di Taylor

$$\log(1+z) = z + \cancel{o(z)}\,, \qquad z \to 0\,, \tag{1}$$

con $z = x + 3x^2$. Se nella formula che si ricava effettuando in (1) la sostituzione predetta non riportiamo il resto, otterremmo per il numeratore la

rappresentazione

$$x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right] = x^2\left[x+3x^2-x\right]$$

$$= 3x^4\,, \quad x \to 0\,.$$

Questo potrebbe erroneamente indurre a ritenere che che il numeratore della funzione "tende a zero come $3x^4$ per $x \to 0$". Se invece facciamo uso della formula di Taylor (1) *comprensiva del suo resto*, abbiamo:

$$x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right]$$

$$= x^2\left[x+3x^2+o(x+3x^2)-x\right]$$

$$= x^2\left[3x^2+o(x)\right] = 3x^4+o(x^3)\,, \quad x \to 0\,.$$

Questa formula evidenzia il fatto che ci siamo fermati ad un ordine troppo basso nello sviluppo di Taylor (1) per la funzione $\log(1+z)$; infatti il resto che interviene nella rappresentazione predetta è soltanto trascurabile rispetto ad x^3 (per $x \to 0$): in particolare, tale resto potrebbe contenere un termine infinitesimo di ordine

rappresentazione

$$x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right] = x^2\left[x+3x^2-x\right]$$

$$= 3x^4\,, \quad x \to 0\,.$$

Questo potrebbe erroneamente indurre a ritenere che che il numeratore della funzione "tende a zero come $3x^4$ per $x \to 0$". Se invece facciamo uso della formula di Taylor (1) *comprensiva del suo resto*, abbiamo:

$$x^2\left[\log(1+x+3x^2)-x\right]$$

$$= x^2\left[x+3x^2+o(x+3x^2)-x\right]$$

$$= x^2\left[3x^2+o(x)\right] = 3x^4+o(x^3)\,, \quad x \to 0\,.$$

Questa formula evidenzia il fatto che ci siamo fermati ad un ordine troppo basso nello sviluppo di Taylor (1) per la funzione $\log(1+z)$; infatti il resto che interviene nella rappresentazione predetta è soltanto trascurabile rispetto ad x^3 (per $x \to 0$): in particolare, tale resto potrebbe contenere un termine infinitesimo di ordine

4.

Dobbiamo pertanto ritornare allo sviluppo di Taylor per $\log(1+z)$, progredendo ad un ordine successivo:

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2)\,, \qquad z \to 0\,.$$

Sostituendo nuovamente $z = x + 3x^2$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
&x^2\left[\log(1+x+3x^2) - x\right] \\
&= x^2\left[3x^2 - \tfrac{1}{2}(x+3x^2)^2 + o((x+3x^2)^2)\right] \\
&= x^2\left[3x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 \overbrace{- \tfrac{9}{2}x^4 - 3x^3}^{o(x^2)} + o(x^2)\right] \\
&= \tfrac{5}{2}x^4 + o(x^4)\,, \qquad x \to 0\,.
\end{aligned}$$

Come si deduce dalla formula precedente, il numeratore della funzione di cui dobbiamo calcolare il limite "tende a zero per $x \to 0$ come $\frac{5}{2}x^4$".

In conclusione, ricaviamo che il limite da calcolarsi diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{5}{2}\,.$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intorno di a

ESEMPIO (Criterio della derivata n-esima). Sia f n volte derivabile in a, e supponiamo che

$$f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Il Teorema sui polinomi di Taylor ci assicura che f si comporta allora come $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ nel senso che

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

$$f(x) - f(a) = \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}\right)(x-a)^n$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

PERMANENZA DEL SEGNO: $f^{(n)}(a) \gtrless 0 \Rightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n} \gtrless 0$

per $0 < |x-a| < \delta$

n pari: $(x-a)^n > 0$

per $0 < |x-a| < \delta$

n dispari: $(x-a)^n \begin{cases} > 0 & a < x < a+\delta \\ < 0 & a-\delta < x < a \end{cases}$

Dunque se n è pari e $f^{(n)}(a) < 0$ si ha un punto di massimo relativo per f in a; se n è pari e $f^{(n)}(a) > 0$ si ha un punto di minimo relativo per f in a.

Se n è dispari e $f^{(n)}(a) < 0$ f è strettamente decrescente in un intorno di a; se n è dispari e $f^{(n)}(a) > 0$ f è strettamente crescente in un intorno di a.

FORMULA DI TAYLOR - PEANO

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n$$

FORMULA DI TAYLOR - PEANO

$$f(x) = f(a) + \overbrace{f'(a)}^{0}(x-a) + \frac{\overbrace{f^{(2)}(a)}^{0}}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{\overbrace{f^{(3)}(a)}^{0}}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{\overbrace{f^{(n-1)}(a)}^{0}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n$$

IPOTESI : $f'(a) = f^{(2)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$

Il resto di Lagrange nella formula di Taylor

Sia f $n+1$ volte derivabile in un intervallo I e $a \in I$. Allora usando il Teorema di Cauchy si dimostra che se $x \in I$, esiste $\xi \in]a, x[$ tale che si ha

$$\boxed{f(x) = T_a^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},}$$

ovvero il resto della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta di Lagrange)

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.}$$

NOTA: per $n=0$

$T_a^n f(x) = f(a)$

$\Rightarrow$ TEOREMA DI LAGRANGE

Possiamo finalmente calcolare la somma di alcune serie notevoli che abbiamo già enunciato in precedenza.

ESEMPI: 1) Consideriamo $f(x) = e^x$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

da cui

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$