POLINOMI DI TAYLOR E CALCOLO DI LIMITI

Sia $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ infinitesima per } x \to x_0)\,.$$

Supponiamo anche f derivabile *infinite* volte in x_0, in modo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, valga la formula

FORMULA DI TAYLOR PEANO

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nelle ipotesi precedenti si ha $f(x_0) = 0$, quindi (1) si riduce a:

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

- Supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,.$$

POLINOMI DI TAYLOR E CALCOLO DI LIMITI

Sia $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ infinitesima per } x \to x_0)\,.$$

Supponiamo anche f derivabile *infinite* volte in x_0, in modo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, valga la formula

FORMULA DI TAYLOR PEANO

$$\begin{aligned} f(x) = \cancel{f(x_0)} + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nelle ipotesi precedenti si ha $f(x_0) = 0$, quindi (1) si riduce a:

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

- Supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,.$$

POLINOMI DI TAYLOR E CALCOLO DI LIMITI

Sia $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ infinitesima per } x \to x_0)\,.$$

Supponiamo anche f derivabile *infinite* volte in x_0, in modo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, valga la formula

FORMULA DI TAYLOR PEANO

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nelle ipotesi precedenti si ha $f(x_0) = 0$, quindi (1) si riduce a:

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + \overbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}^{o(x-x_0)} \\ + \cdots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{o(x-x_0)} + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{o(x-x_0)}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

- Supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,.$$

POLINOMI DI TAYLOR E CALCOLO DI LIMITI

Sia $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ infinitesima per } x \to x_0)\,.$$

Supponiamo anche f derivabile *infinite* volte in x_0, in modo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, valga la formula

FORMULA DI TAYLOR PEANO

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nelle ipotesi precedenti si ha $f(x_0) = 0$, quindi (1) si riduce a:

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

- Supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$\frac{f(x)}{f'(x_0)(x - x_0)} = \underbrace{\frac{f'(x_0)(x - x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)}}_{=1} + \underbrace{\frac{o(x - x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,.$$

POLINOMI DI TAYLOR E CALCOLO DI LIMITI

Sia $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ infinitesima per } x \to x_0)\,.$$

Supponiamo anche f derivabile *infinite* volte in x_0, in modo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, valga la formula

FORMULA DI TAYLOR PEANO

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,. \tag{1}$$

Nelle ipotesi precedenti si ha $f(x_0) = 0$, quindi (1) si riduce a:

$$f(x) = \cancel{f'(x_0)(x - x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{o(x-x_0)^2} + \cdots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{o(x-x_0)^2} + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{o(x-x_0)^2}\,. \tag{2}$$

Supponiamo che $f'(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,.$$

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$

- Supponiamo ora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2, \quad x \to x_0 .$$

- Supponiamo, in generale, che $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \to x_0 .$$

Conclusione: il primo termine non nullo (con coefficiente diverso da zero) nello sviluppo di Taylor di f con centro in x_0 determina l'*ordine di infinitesimo* di f (rispetto all'*infinitesimo campione* $(x - x_0)$) per $x \to x_0$.

• Supponiamo ora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$\frac{f(x)}{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} = \overbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}^{\to 1} + \underbrace{\frac{o((x-x_0)^2)}{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2, \quad x \to x_0 .$$

• Supponiamo, in generale, che $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$: (2) si riduce a

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \to x_0 .$$

Conclusione: il primo termine non nullo (con coefficiente diverso da zero) nello sviluppo di Taylor di f con centro in x_0 determina l'*ordine di infinitesimo* di f (rispetto all'*infinitesimo campione* $(x - x_0)$) per $x \to x_0$.

Supponiamo ora di dover calcolare un limite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

con $f, g :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ infinitamente derivabili in x_0 e tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

(così che in particolare $f(x_0) = g(x_0) = 0$).
Dagli sviluppi di Taylor di f e g con centro in x_0, si determinano gli *ordini di infinitesimo* di f e di g per $x \to x_0$ (rispetto a $(x - x_0)$).
Supponendo che per $h, k \in \mathbb{N}$ con $h, k \geq 1$ si abbia

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(h-1)}(x_0) = 0\,, \\ g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(k-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

e che le prime derivate non nulle di f e di g in x_0 siano $f^{(h)}(x_0)$ e $g^{(k)}(x_0)$ rispettivamente, ricaviamo in

$$f(x) = \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h + o(x - x_0)^h$$

$$g(x) = \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^k$$

particolare che

$$f(x) \sim \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h\,, \quad x \to x_0\,,$$

$$g(x) \sim \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,, \quad x \to x_0\,,$$

da cui si deduce che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h}{\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

$$= \frac{k!\, f^{(h)}(x_0)}{h!\, g^{(k)}(x_0)} \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{h-k}\,.$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } h > k \\ \dfrac{k!\, f^{(h)}(x_0)}{h!\, g^{(k)}(x_0)} & \text{se } h = k \\ \infty & \text{se } h < k \end{cases}$$

L'operazione che associa ad una funzione f n-volte derivabile in un punto a il suo polinomio di Taylor di ordine n viene indicata con il simbolo T_a^n. Per lo più avremo a che fare con $a = 0$, nel qual caso ci "dimenticheremo" dell'indice 0.

Per esempio:

$$T_0^3(\exp) = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$

$$T_0^4(\sin) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{6}.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE (per il calcolo):

1) $T_a^n(f \pm g) = T_a^n f \pm T_a^n g$;

2) $T_a^n(fg) = T_a^n(T_a^n f \cdot T_a^n g)$;

3) $T_a^n(g \circ f) = T_a^n(T_{f(a)}^n g \circ T_a^n f)$.

4) $T_a^n(cf) = c\,T_a^n f$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Notare che se P è polinomio in $(x-a)$, allora l'operazione T_a^n corrisponde a "troncare" P al grado n. Infatti si

Es: $P(x) = 1 + 3(x-a)^2 + 7(x-a)^5 - 10(x-a)^6$

$T_a^2(P)(x) = 1 + 3(x-a)^2$

Polinomi di Taylor elementari

(da imparare A MEMORIA, e da verificare calcolando le derivate in 0)

$$T^n(\exp)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$T^{2n}(\cos)(x) = T^{2n+1}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$T^{2n+1}(\sin)(x) = T^{2n+2}(\sin)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$T^n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$T^n((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$$

es: $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

$$T^2 f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

1. $f(x) = e^{x}$

$$T^{n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k}$$

$f^{(k)}(x) = e^{x}$ $\qquad$ $f^{(k)}(0) = 1$ $\qquad$ $\forall k$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$T^{2n} f(x) = \sum_{h=0}^{2n} \frac{f^{(h)}(0)}{h!} x^{h}$$

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $f'''(0) = 0$

1. $f(x) = e^{x}$

$$T^{n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k}$$

$$f^{(k)}(x) = e^{x} \qquad f^{(k)}(0) = 1 \qquad \forall k$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$T^{2n} f(x) = \sum_{h=0}^{2n} \frac{f^{(h)}(0)}{h!} x^{h}$$

$$f^{IV}(x) = f(x) = \cos(x) \qquad f^{IV}(0) = f(0) = 1$$

$$f^{V}(x) = f'(x) = -\sin(x) \qquad f^{V}(0) = f'(0) = 0$$

$$f^{VI}(x) = f''(x) = -\cos(x) \qquad f^{VI}(0) = f''(0) = -1$$

$$f^{VII}(x) = f'''(x) = \sin(x) \qquad f^{VII}(0) = f'''(0) = 0$$

1. $f(x) = e^{x}$

$$T^{n}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k}$$

$$f^{(k)}(x) = e^{x} \qquad f^{(k)}(0) = 1 \qquad \forall k$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$\boxed{T^{2n}f(x) = \sum_{h=0}^{2n} \frac{f^{(h)}(0)}{h!} x^{h} \underset{(h=2k)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!} x^{2k}}$$

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x)$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin(x)$ $\qquad f'''(0) = 0$

1. $f(x) = e^x$

$$T^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(0) = 1 \qquad \forall k$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$\boxed{T^{2n} f(x) = \sum_{h=0}^{2n} \frac{f^{(h)}(0)}{h!} x^h \underset{(h=2k)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}$$

$$f(x) = \cos(x) \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin(x) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin(x) \qquad f'''(0) = 0$$

$$T^{2n+1} f(x) = T^{2n} f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = T^{2n} f(x) + o(x^{2n+1}) \quad x \to 0$$

FORMULE DI TAYLOR DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

Ricordiamo che le funzioni iperboliche sinh e cosh sono definite come

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.}$$

Ricordiamo che il polinomio di Taylor di grado $n \in \mathbb{N}$ e centro 0 della funzione esponenziale $f_+(x) = e^x$ è dato da

$$T^n(f_+)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Sostituendo $-x$ al posto di x nella formula precedente, otteniamo il polinomio di Taylor di grado n e centro 0 della funzione $f_-(x) = e^{-x}$:

$$T^n(f_-)(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\,.$$

Dalla definizione delle funzioni iperboliche, dalle espressioni dei polinomi di Taylor $T^n(f_+)$ e $T^n(f_-)$ e dalla

FORMULE DI TAYLOR DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

Ricordiamo che le funzioni iperboliche sinh e cosh sono definite come

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.}$$

Ricordiamo che il polinomio di Taylor di grado $n \in \mathbb{N}$ e centro 0 della funzione esponenziale $f_+(x) = e^x$ è dato da

$$T^n(f_+)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Sostituendo $-x$ al posto di x nella formula precedente, otteniamo il polinomio di Taylor di grado n e centro 0 della funzione $f_-(x) = e^{-x}$:

$$-T^n(f_-)(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\,.$$

Dalla definizione delle funzioni iperboliche, dalle espressioni dei polinomi di Taylor $T^n(f_+)$ e $T^n(f_-)$ e dalla

linearità dell'operazione T^n che associa ad una funzione f (n volte derivabile in un intorno di 0) il suo polinomio di Taylor di grado n, ricaviamo ora il polinomio di Taylor di grado n della funzione $\sinh$. Si calcola:

$$\underline{T^n(\sinh)(x)} = \frac{1}{2}\left(T^n(f_+)(x) - T^n(f_-)(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + (1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\underline{= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(1-(-1)^n)}{2}\frac{x^n}{n!}}\,.$$

Osservando che

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0\,, & \text{per } n \text{ pari}\,, \\ 2\,, & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

per ogni intero $k \geq 0$, si deduce per il <u>polinomio di Taylor della funzione $\sinh$ di grado $n = 2k+1$ e centro</u>

0 l'espressione seguente

$$T^{2k+1}(\sinh)(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}.$$

Si osserva che il polinomio di Taylor suddetto coinvolge soltanto le potenze di x con esponente dispari. Si confronti l'espressione predetta con quella del polinomio di Taylor di pari grado (e uguale centro 0) della funzione trigonometrica $\sin$,

$$T^{2k+1}(\sin)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!},$$

in cui compaiono esattamente gli stessi termini ma con segni alternati.
Si osserva anche che il polinomio di Taylor di $\sinh$ di grado $2k+2$ e centro 0, $T^{2k+2}(\sinh)$, coincide con $T^{2k+1}(\sinh)$; infatti il coefficiente della potenza di x

con esponente $2k+2$ (come quello di ogni potenza di x ad esponente pari) che interviene nell'espressione del polinomio $T^{2k+2}(\sinh)$ è zero.
Dalle considerazioni predette e dalla formula del Teorema di Taylor-Peano si ricava per la funzione $\sinh$ la seguente formula di Taylor:

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh x &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} + o(x^{2k+1}) \\ &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} + o(x^{2k+2}), \quad x \to 0, \ \forall\, k \geq 0.\end{aligned}}$$

La prima delle uguaglianze predette è conseguenza diretta del Teorema di Taylor-Peano per il polinomio di Taylor $T^{2k+1}(\sinh)$ di grado $2k+1$ e centro 0 per la funzione $\sinh$: la differenza $\sinh x - T^{2k+1}(\sinh)(x)$ è $o(x^{2k+1})$ per $x \to 0$. La seconda uguaglianza è conseguenza del fatto che $T^{2k+2}(\sinh) = T^{2k+1}(\sinh)$ (i polinomi di Taylor di $\sinh$ contengono solo le potenze di x ad esponente dispari).

Con considerazioni analoghe, ricaviamo ora l'espressione del polinomio di Taylor di grado n e centro 0 della funzione iperbolica $\cosh$. Si calcola:

$$T^n(\cosh)(x) = \frac{1}{2}\left(T^n(f_+)(x) + T^n(f_-)(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(1+(-1)^n)}{2}\frac{x^n}{n!}.$$

Osservando che

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2\,, & \text{per } n \text{ pari}\,, \\ 0\,, & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

per ogni intero $k \geq 0$, si deduce per il polinomio di Taylor della funzione $\cosh$ di grado $n = 2k$ e centro 0 l'espressione seguente

$$T^{2k}(\cosh)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!}.$$

Si osserva che il polinomio di Taylor suddetto coinvolge soltanto le potenze di x con esponente pari. Si con-

fronti l'espressione predetta con quella del polinomio di Taylor di pari grado (e uguale centro 0) della funzione trigonometrica $\cos$,

$$T^{2k}(\cos)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!},$$

in cui compaiono esattamente gli stessi termini ma con segni alternati.

Si osserva anche che il polinomio di Taylor di $\cosh$ di grado $2k+1$ e centro 0, $T^{2k+1}(\cosh)$, coincide con $T^{2k}(\cosh)$; infatti il coefficiente della potenza di x con esponente $2k+1$ (come quello di ogni potenza di x ad esponente dispari) che interviene nell'espressione del polinomio $T^{2k+1}(\cosh)$ è zero.

Dalle considerazioni predette e dalla formula del Teorema di Taylor-Peano si ricava per la funzione $\cosh$ la

seguente formula di Taylor:

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!} + o(x^{2k}) \\ &= \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!} + o(x^{2k+1}), \quad x \to 0, \ \forall\, k \geq 0.\end{aligned}}$$

Alle formule precedenti si applicano considerazioni analoghe a quelle relative alla funzione $\sinh$. La prima uguaglianza è conseguenza diretta del Teorema di Taylor-Peano per il polinomio di Taylor $T^{2k}(\cosh)$ di grado $2k$ e centro 0 per la funzione $\cosh$: la differenza $\cosh x - T^{2k}(\cosh)(x)$ è $o(x^{2k})$ per $x \to 0$. La seconda uguaglianza è conseguenza del fatto che $T^{2k+1}(\cosh) = T^{2k}(\cosh)$ (i polinomi di Taylor di $\cosh$ contengono solo le potenze di x ad esponente pari).

sviluppo di Taylor con centro $x_0 = 0$ di

$$f(x) = x\left(\cos(x^2) - 1\right)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + o(z^3) \longleftarrow \text{per } z = x^2$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + o\left((x^2)^3\right) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

$$\cos(x^2) - 1 = -\frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

$$f(x) = x\left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6)\right) = -\frac{x^5}{2} + x\,o(x^6) =$$

$$= -\frac{x^5}{2} + o(x^7)$$