ii) stesso ragionamento;

iii) $A = \emptyset \Longrightarrow$ maggioranti $= \overline{\mathbf{R}} \Longrightarrow \sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$ $\square$

Intervalli di $\overline{\mathbf{R}}$

Def. $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ si dice *intervallo* quando
$\forall x, y, z \in \overline{\mathbf{R}}$ se $x, y \in I$ e $x \leq z \leq y$ allora $z \in I$.

Nomenclatura: $(a, b \in \overline{\mathbf{R}} \;\; a \leq b)$

$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo chiuso),
$]a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x \leq b\}$ (intervallo semiaperto),
$[a, b[= \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x < b\}$ (intervallo semiaperto),
$]a, b[= \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x < b\}$ (intervallo aperto).

Esempi: 1) $[0, 1] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \; 0 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$;

2) $[0, 0] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \; 0 \leq x \leq 0\} = \{0\}$;

3) $]-\infty, \pi] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \; -\infty < x \leq \pi\} = \{x \in \mathbf{R} : x \leq \pi\}$;

4) $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbf{R}}$.

Se I è intervallo limitato, allora chiamiamo *ampiezza di I*, il numero

$$\sup I - \inf I$$

Esempi: l'ampiezza di $]-7, 3]$ è 10; l'ampiezza di $[\pi, \pi]$ è 0.

Insiemi densi in R

Gli insiemi $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sono *densi* in $\mathbf{R}$; ovvero: $\forall x, y \in \mathbf{R}$ tali che $x < y$, gli insiemi

$$\{z \in \mathbf{Q} \ : \ x < z < y\} \ e \ \{z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \ : \ x < z < y\}$$

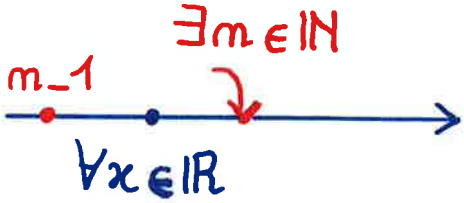
sono infiniti.

Def. I *numeri irrazionali* sono gli elementi di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

La Proprietà di Archimede

Def. $\mathbf{R}$ gode della proprietà di Archimede (o è *Archimedeo*) cioè

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R} \ \exists n \in \mathbf{N} \ : \ n > x.}$$



Equivalentemente: i numeri naturali *non* costituiscono un insieme superiormente limitato di $\mathbf{R}$.

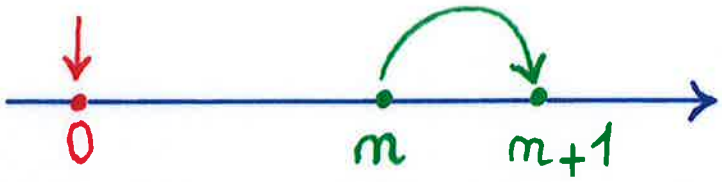
Il Principio di Induzione

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia P_n una proposizione. Supponiamo che valgano:

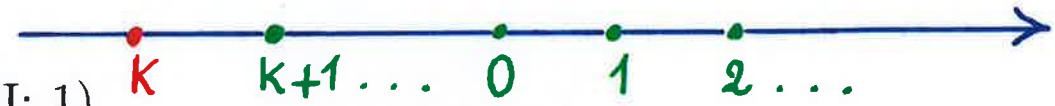
i) P_0 *è vera*

ii) $\forall n \in \mathbf{N} \quad P_n \Longrightarrow P_{n+1}$

Allora $\forall n \in \mathbf{N}$ P_n *è vera.*



VARIANTE: in $\mathbf{Z}$, a partire da P_k, $k \in \mathbf{Z}$.



ESEMPI: 1)

$$\boxed{P_n : 2^n > n.}$$

Verifichiamo i): $2^0 = 1 > 0$ (vera).

Verifichiamo ii): $2^n > n \Longrightarrow 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = \underbrace{2^n}_{>n} + 2^n > \underbrace{2^n}_{\geq 1} + n \geq n+1.$ $\quad (P_n \Rightarrow P_{n+1})$

Abbiamo quindi dimostrato che $\forall n \in \mathbf{N}$ $2^n > n$.

2)(per il simbolo $\sum$ di sommatoria si veda a pag. 41)

$$\boxed{P_n : \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

SOMMATORIA

Verifichiamo i): $P_1 : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (vera).

Verifichiamo ii). Supponiamo allora che P_n sia vera. Abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \boxed{(1+2+3+\ldots+n)} + (n+1) =$$

P_n

$$= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Perciò P_{n+1} è vera e quindi P_n è vera $\forall n \geq 1$.

Def. Il *valore assoluto* o *modulo* di x:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

Esempi. $|3| = 3$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$.

Proprietà del modulo:

$|x+y| \neq |x| + |y|$

(Es: $x = 5$, $y = -5$)

1. $|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

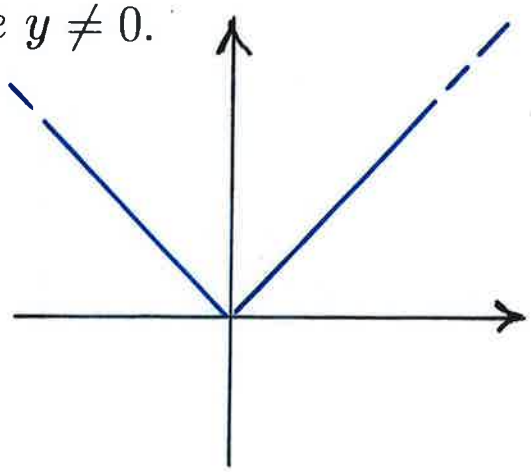
2. $\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|} \qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ se $y \neq 0$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = |x|$

FUNZIONE VALORE ASS. (MODULO)



Le potenze ad esponente reale

Sia $a > 0$. Se $n \in \mathbf{N}$ si definisce $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$ e $a^{-n} = (a^n)^{-1}$. La definizione si estende a $q \in \mathbf{Q}$: se $q = \frac{m}{n}$ si pone

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\boxed{y = a^q \Longleftrightarrow y^n = a^m.}$$

$a^{-m/n} = 1/a^{m/n}$

La definizione può essere estesa a $x \in \mathbf{R}$, ponendo

$$a^x = \begin{cases} \overbrace{\inf\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \geq x\}}^{\text{inferiorm. limitato}} & \text{se } a \geq 1 \\ \underbrace{\sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \geq x\}}_{\text{superiorm. limitato}} & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$\left(r \in \mathbb{Q} \quad r \leq x \leq q \Rightarrow a^r \leq a^q \right)$

MINORANTE

La funzione $x \mapsto a^x$ con dominio $\mathbf{R}$ viene detta *esponenziale di base a*, e viene a volte denotata con $\exp_a$.

Def. *Costante di Nepero:*

$$\boxed{e = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}.}$$

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

superiorm. limitato

Stima: $2.71 < e < 2.72$.

Si chiama *esponenziale* la funzione $exp(x) = e^x$ con dominio $\mathbf{R}$.

Teorema (Proprietà delle potenze) *Se* $a, b > 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, *allora:* $a^x > 0$, $a^0 = 1$, $1^x = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $a^{-x} = (a^x)^{-1} = (a^{-1})^x$,

$$\boxed{\begin{array}{c} a > 1 \Longrightarrow (x < y \Longleftrightarrow a^x < a^y) \\ 0 < a < 1 \Longrightarrow (x < y \Longleftrightarrow a^x > a^y) \end{array}}$$

$$x > 0 \Longrightarrow (a < b \Longleftrightarrow a^x < b^x)$$

$$x < 0 \Longrightarrow (a < b \Longleftrightarrow a^x > b^x).$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = a^x$

Se $a > 1$, f strett. crescente
Se $0 < a < 1$, f strett. decresc.

Nota. Sia $A = \{2^x : x \in \mathbf{R}\}$. Allora: $\inf A = 0$ e A non è sup. lim. (Infatti: $\forall n \in \mathbf{N}\ 2^n > n \Longrightarrow A$ non sup. lim.; $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\ 0 < 2^{-n} < \frac{1}{n} \Longrightarrow 0 \leq \inf A \leq \inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\} = 0 \Longrightarrow \inf A = 0$).

Esercizio. Lo stesso vale se si ha $A = \{a^x : x \in \mathbf{R}\}$ $(a > 0, a \neq 1)$ (SUGGERIMENTO: $a^x = 2^{x \log_2 a} \ldots$)

Teorema. $(a > 0, a \neq 1)$ $\forall x > 0\ \exists y \in \mathbf{R} : a^y = x.$ $\longrightarrow$ Se $a > 0$ e $a \neq 1$

Def. a, x, y come sopra; $\boxed{y = \log_a x}$ ($\log x$ se $a = e$). $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+$

Se $a > 0$ e $a \neq 1$ è ben definita

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f^{-1}(x) = \log_a x$