$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Definizione: Date due funzioni f, g, si dice che

$$f = o(g) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$(f \in o(g))$

(si legge *f è o piccolo di g*). (f è "trascurabile" rispetto a g) per $x \to x_0$

Dalla def. abbiamo subito:

$$o(g) + o(g) = o(g), \quad o(cg) = o(g) \ (c \neq 0), \quad o(g + o(g)) = o(g).$$

NOTA: $o(g) - o(g) = o(g)$

ESEMPI: Per $x \to 0$

$$x^2 = o(x), \quad x = o(1),$$
$$x^2 + x^3 = o(x^{3/2}), \quad \sin^2 x = o(\sin x) = o(x).$$

Differenziabilità

Def. Sia I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è *differenziabile* in x_0 quando esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che si abbia

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \overbrace{o(x - x_0)}^{R(x)} \text{ per } x \to x_0}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO: la retta $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$ approssima la curva $y = f(x)$ "ad un ordine superiore a $x - x_0$" (questa retta è *tangente* alla curva).

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \quad . \quad \text{In particolare: } \lim_{x \to x_0} R(x) = 0$$

Infatti: $$R(x) = \underbrace{\frac{R(x)}{x - x_0}}_{\to 0} \overbrace{(x - x_0)}^{\to 0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

CONFRONTO TRA INFINITI E INFINITESIMI e SIMBOLO o

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se

   i) g è *infinitesimo* per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$)

   ii) $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$)

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e, quindi, f è un *infinitesimo di ordine superiore* a g per $x \to x_0$.

2. Se f e g sono *infiniti* per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$), allora $f = o(g)$ per $x \to x_0$ significa che f è un *infinito di ordine inferiore* a g per $x \to x_0$

3. Data una funzione g come sopra, il simbolo $o(g)$ (con $x \to x_0$) si riferisce ad una *qualsiasi* funzione f *trascurabile* rispetto a g per $x \to x_0$, cioè tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Teorema. *f differenziabile in x_0 $\iff$ f derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.*

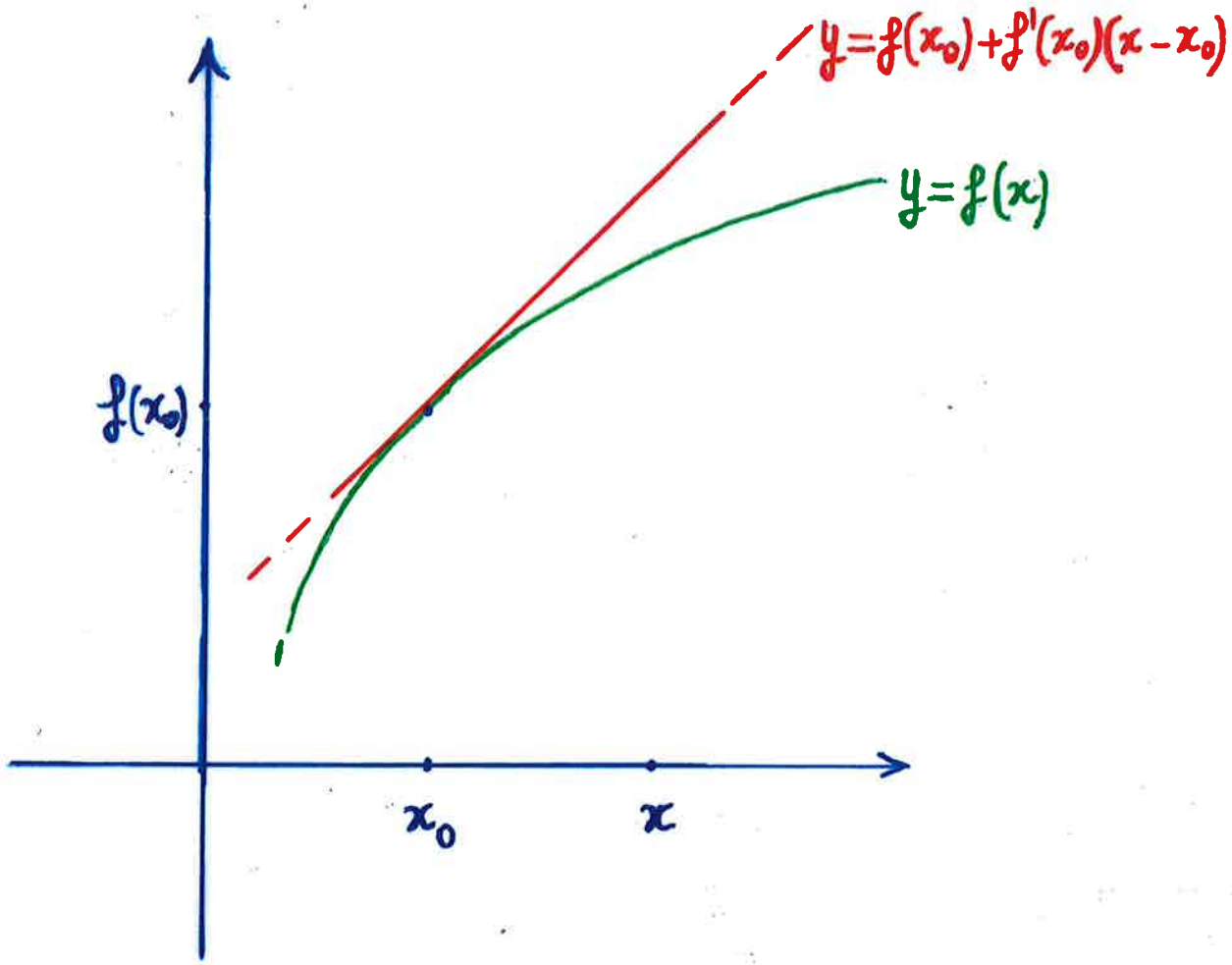
Dim. $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \qquad \square$$

f derivabile in x_0

$$\Rightarrow f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big) = o(x - x_0), \; x \to x_0$$



Teorema. *f differenziabile in x_0 $\iff$ f derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.*

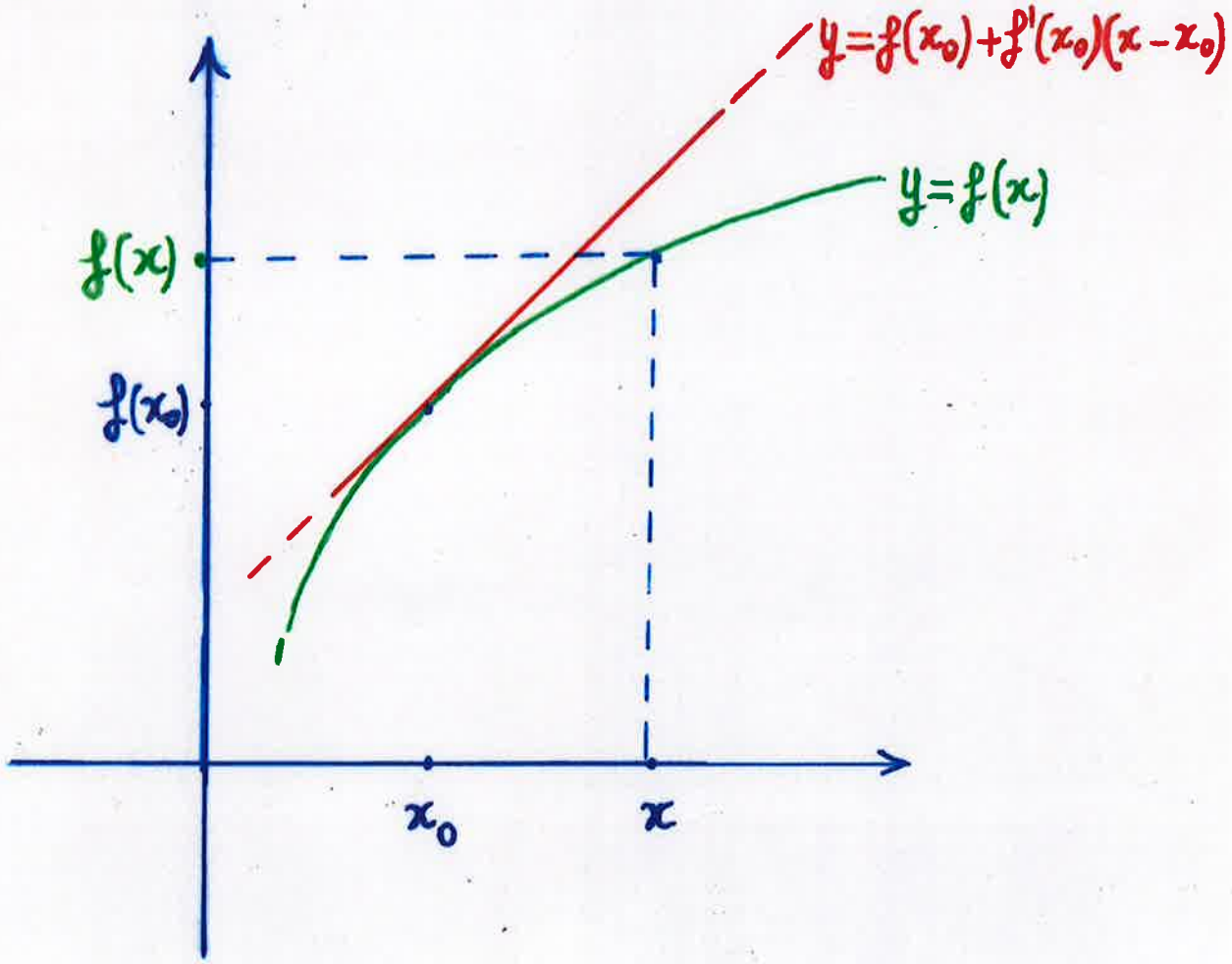
Dim. $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \qquad \square$$

f derivabile in x_0

$$\Rightarrow \underbrace{f(x)} - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big) = o(x - x_0), \; x \to x_0$$



Teorema. *f differenziabile in x_0 $\iff$ f derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.*

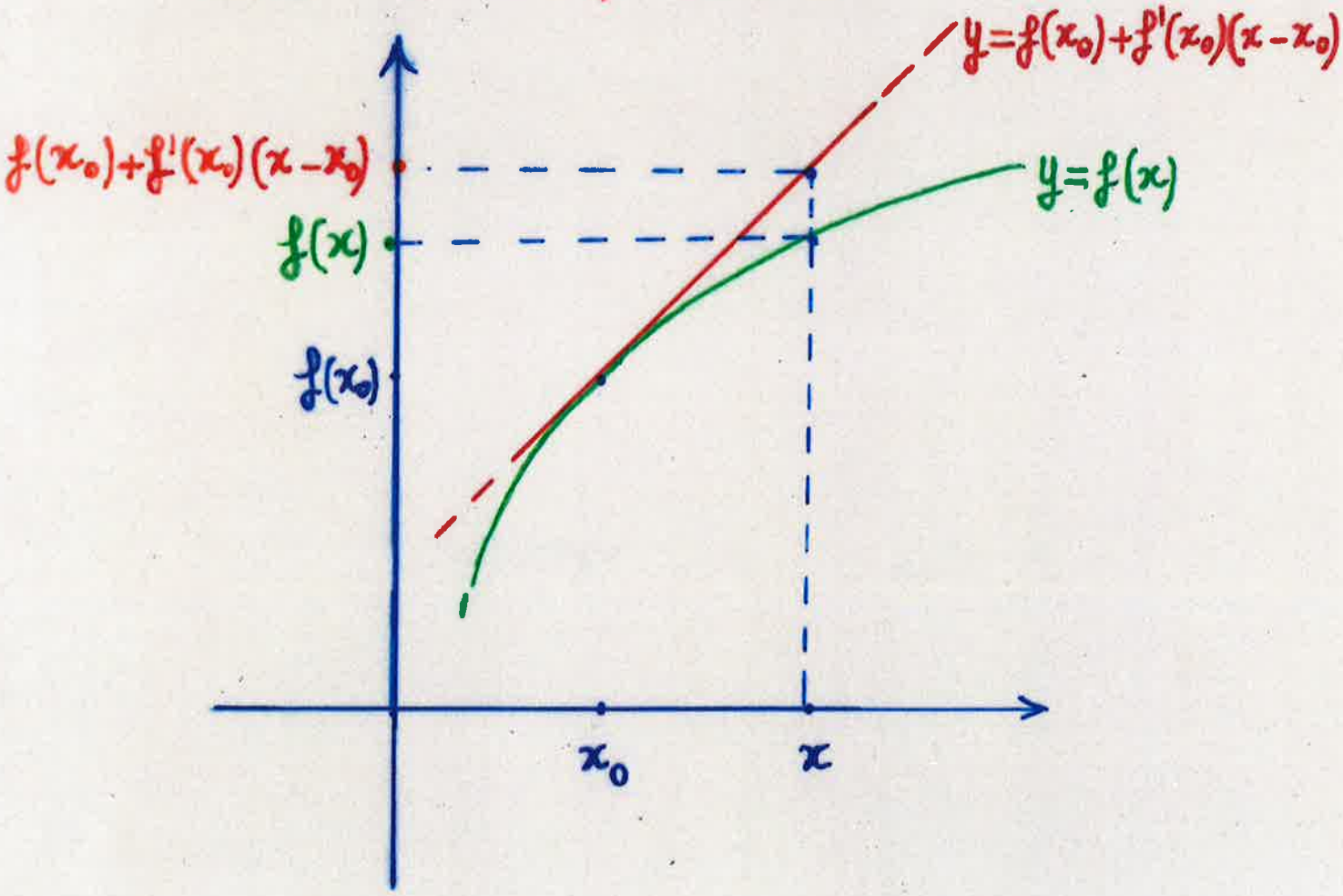
Dim. $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \qquad \square$$

f derivabile in x_0

$$\Rightarrow \underbrace{f(x)} - \underbrace{\left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)} = o(x - x_0), \; x \to x_0$$



Teorema. *f differenziabile in x_0 $\iff$ f derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.*

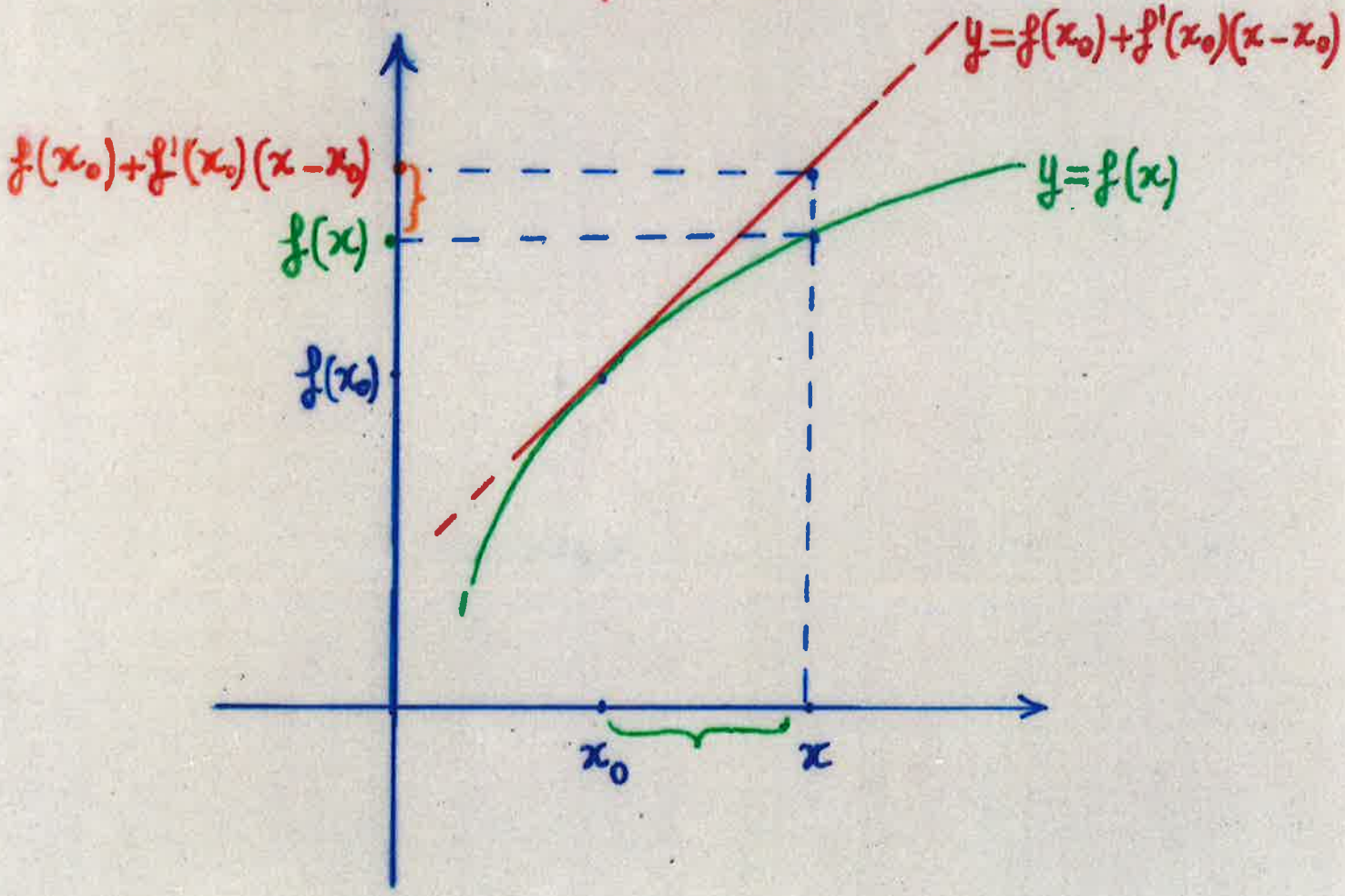
Dim. $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \qquad \square$$

f derivabile in x_0

$$\Rightarrow \underbrace{f(x)} - \underbrace{\left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)} = o(\overbrace{x - x_0}), \; x \to x_0$$



Dalla proposizione segue

$$\frac{\sin x - x}{x} = \frac{o(x^2)}{x} = o(x),$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La formula di Taylor con resto di Peano

OSSERVAZIONE: se f è continua nel punto a possiamo scrivere che

$$f(x) = f(a) + o(1) \qquad \text{per } x \to a; \qquad \left(\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

se f è derivabile in a, si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \qquad \text{per } x \to a.$$

Infatti

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Vogliamo generalizzare questa formula a funzioni n volte derivabili: il problema è trovare un polinomio P di grado n tale che si possa scrivere

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a,$$

e se possibile esprimere P mediante le derivate di f in a fino all'ordine n.

Dalla proposizione segue

$$\frac{\sin x - x}{x} = \frac{o(x^2)}{x} = o(x),$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La formula di Taylor con resto di Peano

OSSERVAZIONE: se f è continua nel punto a possiamo scrivere che

$$f(x) = \overbrace{f(a)}^{\text{grado } 0} + \overbrace{o(1)}^{o(x-a)^0} \quad \text{per } x \to a; \qquad \left(\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

se f è derivabile in a, si ha

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{grado } 1} + \underbrace{o(x-a)}_{o(x-a)^1} \qquad \text{per } x \to a.$$

Infatti

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Vogliamo generalizzare questa formula a funzioni n volte derivabili: il problema è trovare un polinomio P di grado n tale che si possa scrivere

$$f(x) = \underbrace{P(x)}_{\text{grado } n} + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a,$$

e se possibile esprimere P mediante le derivate di f in a fino all'ordine n.

Teorema. *Siano $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$ e f una funzione definita in un intorno del punto $a \in \mathbf{R}$ e derivabile n volte in a. Allora esiste un unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che*

$$\boxed{f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a.}$$

P è caratterizzato da $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per $k = 0, \ldots, n$, ed è quindi dato dalla formula

$(f^{(0)} = f)$

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots}$$

Questo polinomio viene detto polinomio di Taylor di f di ordine n e di centro a.

NOTA: si ha quindi la formula

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n \quad \text{per } x \to a,}$$

detta *formula di Taylor con il resto di Peano*. Questa formula è di ESTREMA UTILITÀ nel calcolo dei limiti.

Dim. Possiamo supporre, mediante una traslazione, che $a = 0$. Consideriamo il polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Dati i numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ si pone

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

SOMMATORIA