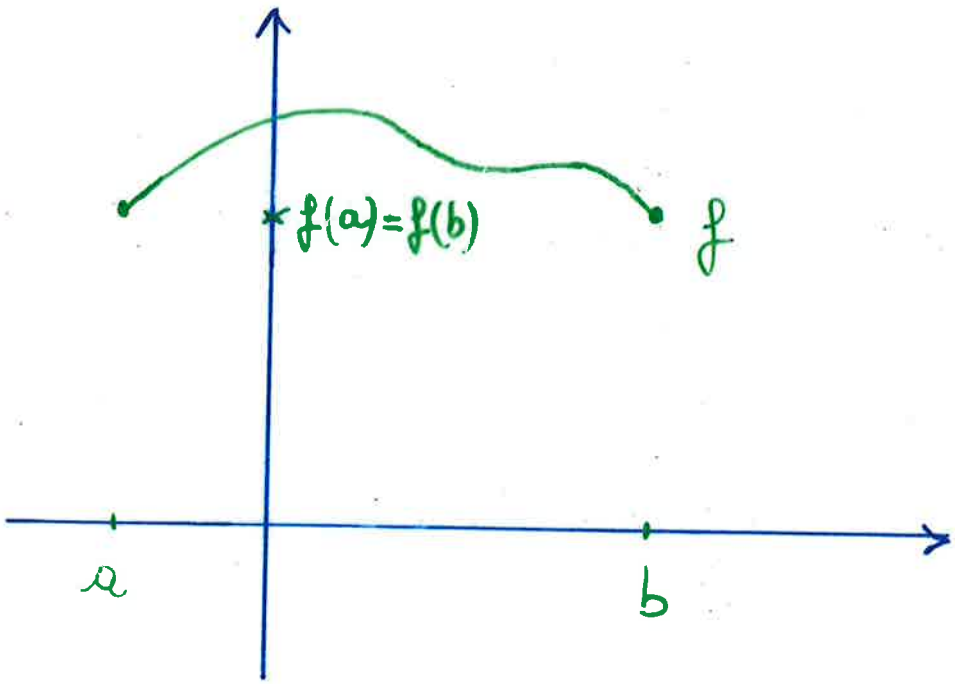
Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange.

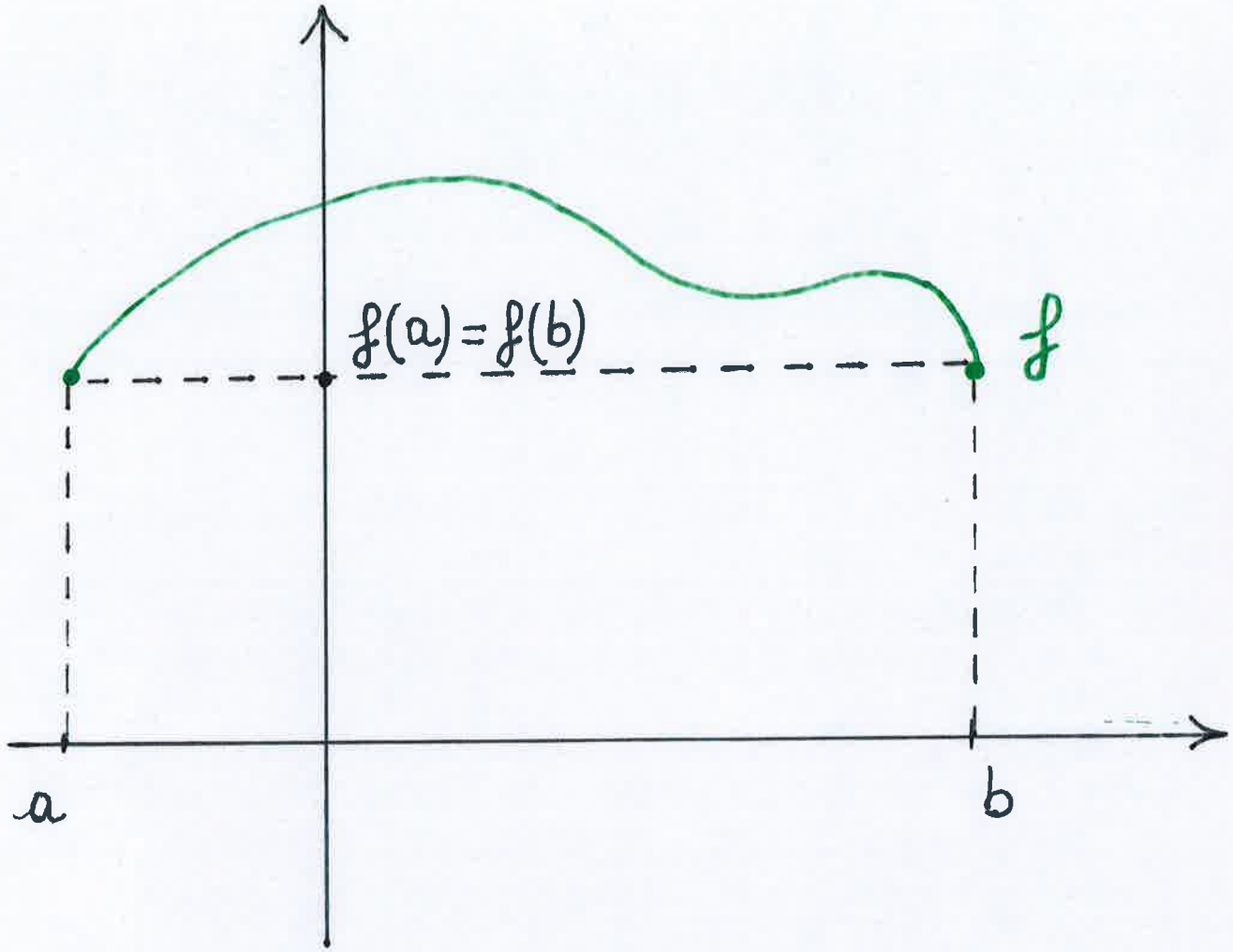
Def. Sia I intervallo. f si dice *derivabile in* $I \subseteq \operatorname{dom} f$ se è derivabile in ogni $x \in I$. Se $I = \operatorname{dom} f$ allora f si dice *derivabile*.

Teorema. (di Rolle) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua in* $[a, b]$, *e derivabile in* $]a, b[$, *tale che* $f(a) = f(b)$. *Allora esiste almeno un punto* $\xi \in]a, b[$ *tale che* $f'(\xi) = 0$.

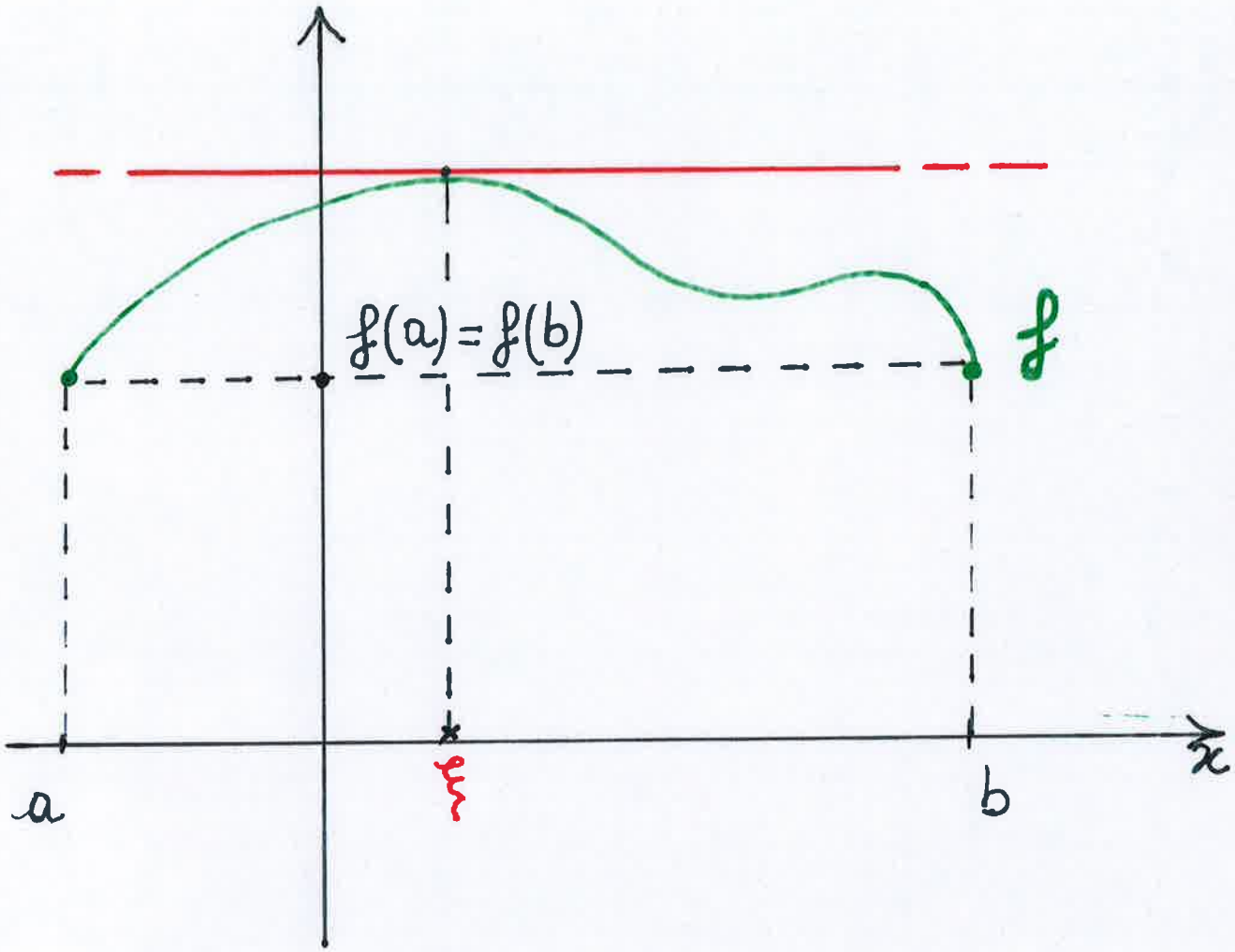
Dim. Se f = costante la tesi è ovvia. Supponiamo allora f non costante. Il Teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di un punto di minimo x_m e di un punto di massimo x_M. Dato che f non è costante si ha $f(x_m) < f(x_M)$. Se $x_m \notin \{a, b\}$, allora x_m è un punto stazionario e quindi $f'(x_m) = 0$. Altrimenti $f(x_m) = f(a) = f(b)$, e quindi $x_M \notin \{a, b\}$, x_M è un punto stazionario e quindi $f'(x_M) = 0$. $\square$



TEOREMA DI ROLLE, INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

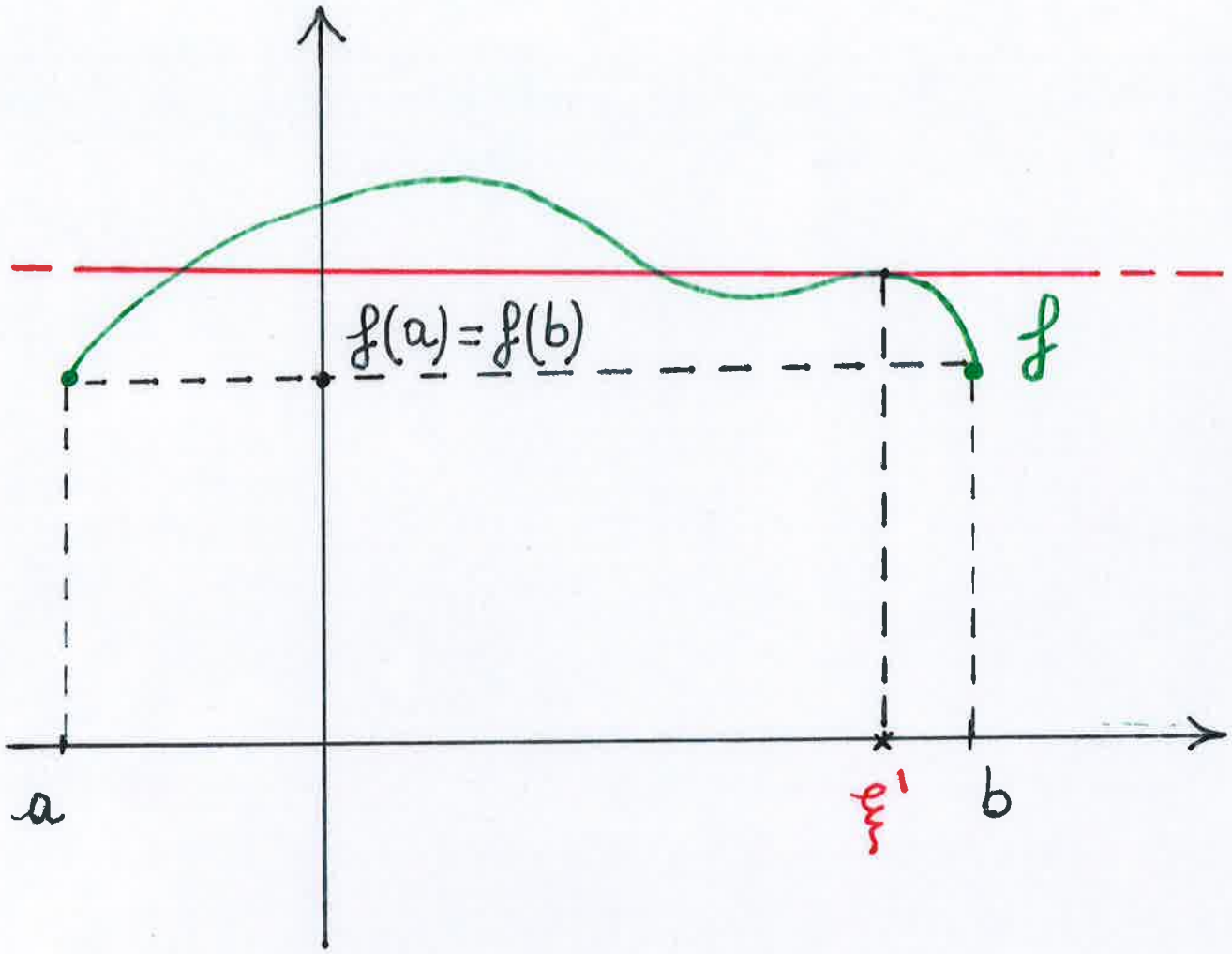


TEOREMA DI ROLLE, INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



$\exists\, \xi \in]a, b[$ t.c. la retta tangente al grafico di f nel punto $(\xi, f(\xi))$ è parallela all'asse x (coeff. angolare nullo)

TEOREMA DI ROLLE, INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



In generale, non è detto che ξ sia UNICO!

Teorema. (di Cauchy) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$, e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

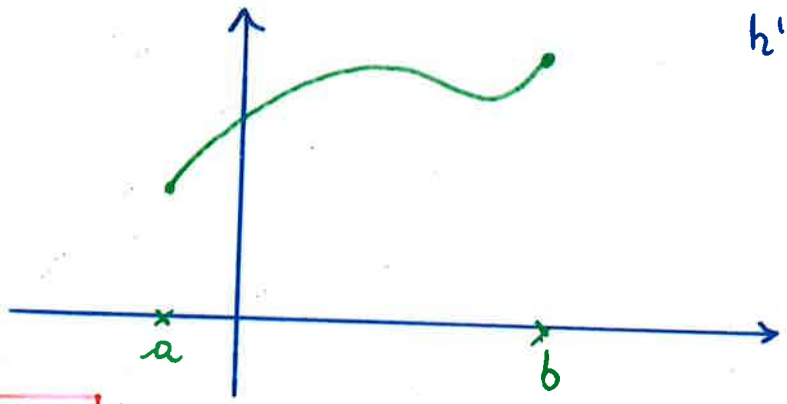
$$\boxed{f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).}$$

Dim. Basta applicare il Teorema di Rolle alla funzione $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$, notando che $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$. $\square$

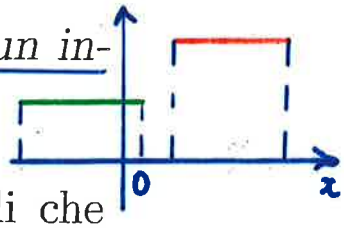
Teorema. (del valor medio, o di Lagrange) *Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Dim. Basta prendere $g(x) = x$ nel Teorema di Cauchy. Oppure, basta applicare il Teorema di Rolle alla funzione $h(x) = f(x) - (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, notando che $h(a) = h(b) = f(a)$. $\square$

$h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

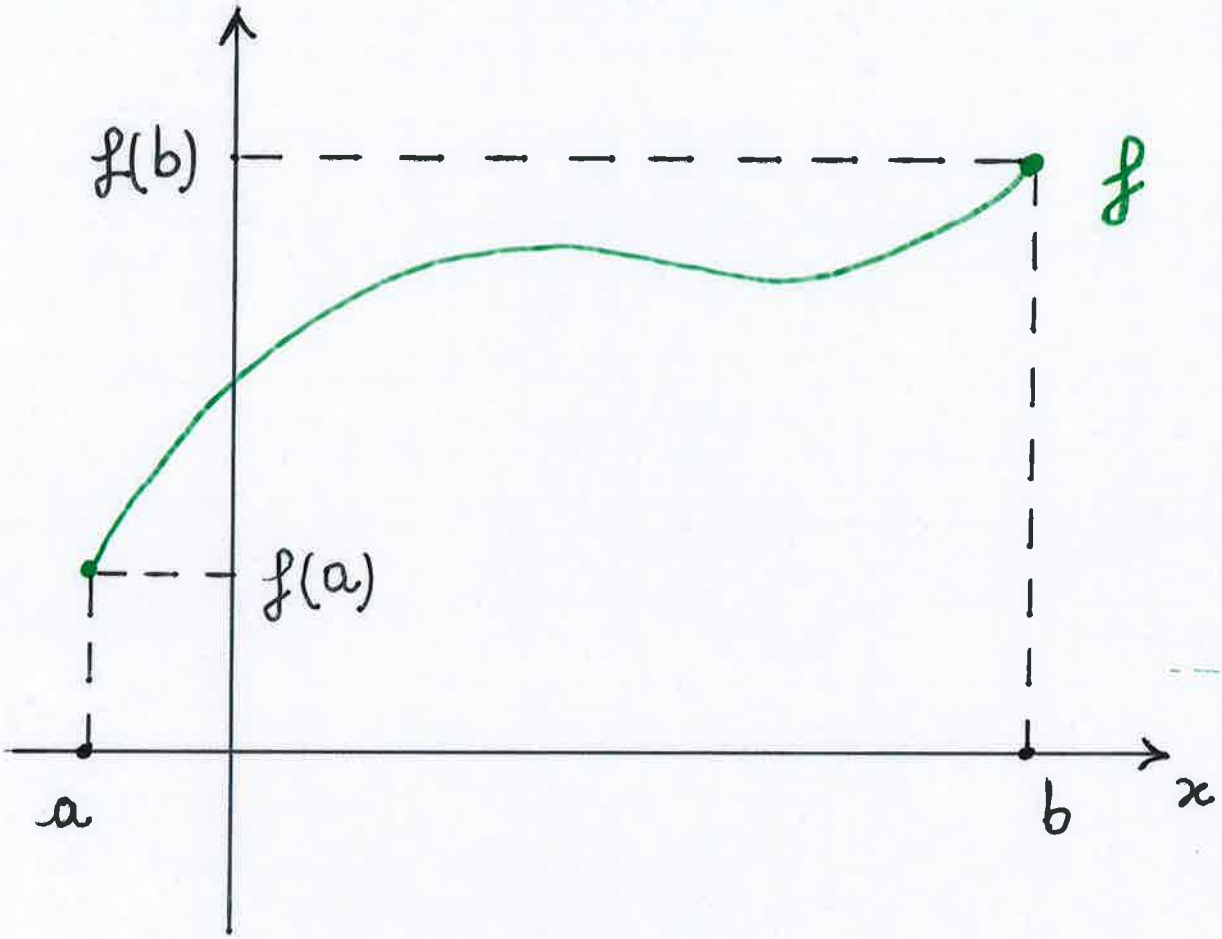


Teorema. (della derivata nulla). *Sia $f' = 0$ su un intervallo I; allora f è costante su I.*

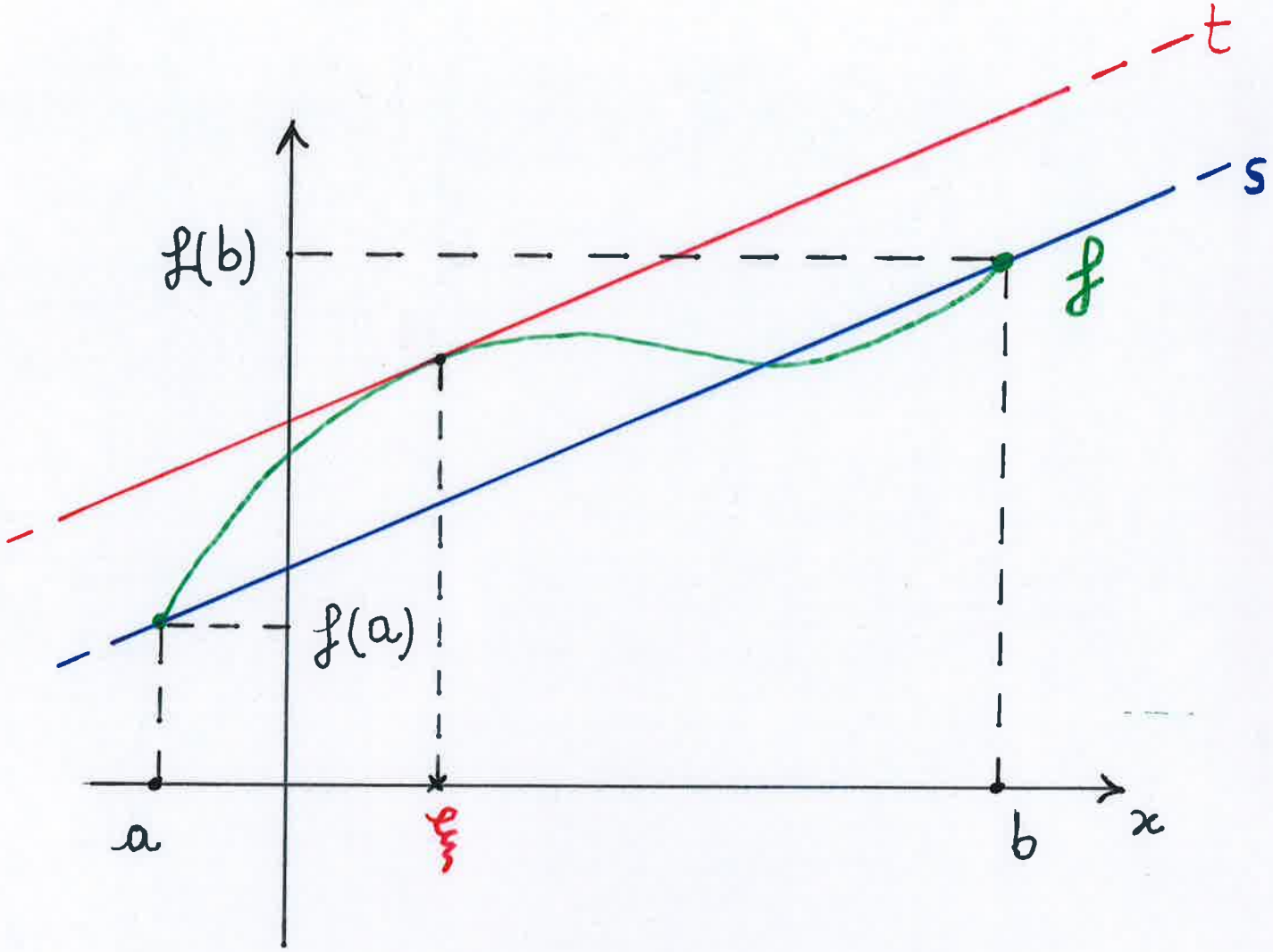


Dim. Se f non è costante allora $\exists a, b \in I$ tali che $a < b$ e $f(b) \neq f(a)$. Allora per il teorema del valor medio esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$, contro l'ipotesi. $\square$

TEOREMA DI LAGRANGE, INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

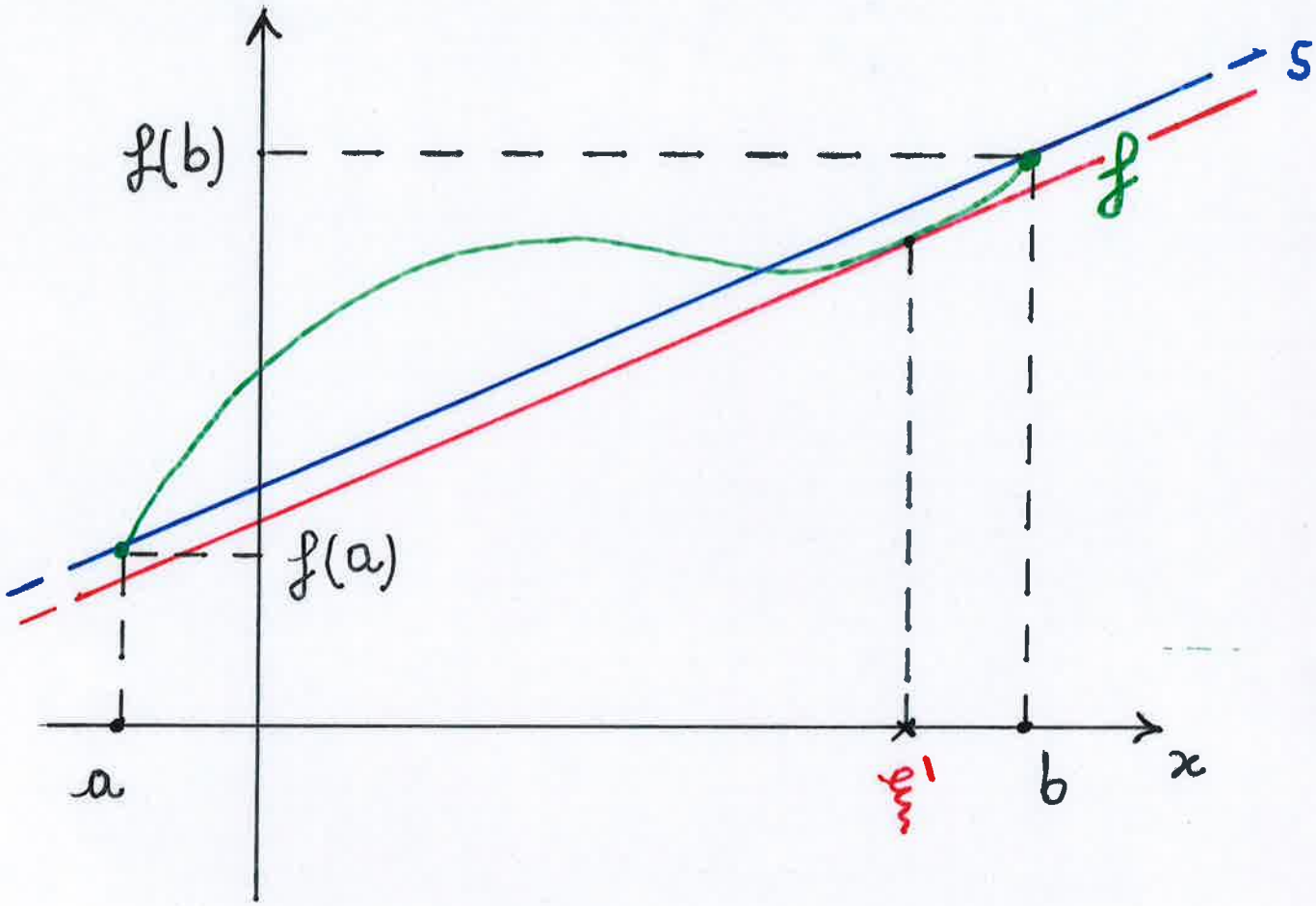


TEOREMA DI LAGRANGE, INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



$\exists\, \xi \in \,]a, b[$ t.c. la retta t tangente al grafico di f nel p.to $(\xi, f(\xi))$ è parallela alla retta s secante il grafico di f nei punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

TEOREMA DI LAGRANGE, INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



In generale, non è detto che ξ sia UNICO!

$\mathrm{dom} f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

ESEMPIO: $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$, $x \neq 0$. Si ha $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^{-2}}(\dfrac{-1}{x^2}) = 0$. Non si può concludere però che f è costante sul suo dominio poichè esso non è un intervallo. Infatti

$f(1)=2\arctan 1 = \pi/2$, $f(-1)=2\arctan(-1) = -\pi/2$, e quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Teorema. (MONOTONIA E DERIVATA) *Sia f derivabile in $[a,b]$. Se $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$), allora f è non decrescente (risp. non crescente). Se $f' > 0$ (risp. $f' < 0$) allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

Dim. ($f' > 0$) Siano $x, y \in [a,b]$ con $x < y$; per il Teorema del valor medio si ha che $\exists\, \xi \in]x,y[$ tale che $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) > 0$. $\square$

NOTA: questo teorema è fondamentale per il disegno di grafici qualitativi di funzioni. La "ricetta" che esso consiglia è la seguente: calcolare la derivata prima; determinare (eventualmente solo qualitativamente) gli intervalli in cui è positiva e quelli in cui è negativa; calcolare i valori (o i limiti) agli estremi di questi intervalli; tracciare il grafico usando il teorema.

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$

$f' \geq 0$ in $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ f non decresc. in $[a,b]$

$f' > 0$ in $[a,b]$ $\Longrightarrow$ f strett. cresc. in $[a,b]$

$\not\Longleftarrow$

Derivate di ordini successivi

Def. Sia f derivabile sull'intervallo I. Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in x_0, allora $(f')'(x_0)$ si dice la *derivata seconda* di f in x_0 e si denota con $f''(x_0)$ o $f^{(2)}(x_0)$.

Allo stesso modo si definiscono per induzione le derivate di ordine k: la funzione *derivata* 0-*ima* di f si definisce ponendo $f^{(0)} = f$; se è definita in ogni punto $x \in I$ la derivata k-ima $f^{(k)}(x) \in \mathbf{R}$ e se ne esiste la derivata in un punto x_0, si definisce $f^{(k+1)}(x_0) = D(f^{(k)})(x_0)$.

Def. Sia I intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbf{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I tali che la derivata k-ima sia una funzione continua. Quindi:

$C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;

$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Si noti che valgono le inclusioni:

$$\ldots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

Definiamo inoltre lo spazio delle funzioni la cui derivata k-ima esiste per ogni $k \in \mathbf{N}$:

Teorema. (criterio della derivata seconda) *Sia $f \in C^1(I)$ e x_0 un punto stazionario di f. Se esiste $f''(x_0) > 0$ (risp. < 0), allora x_0 è un punto di minimo (risp. massimo) relativo per f.*

Dim. Si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x - x_0} > 0$, quindi esiste, per il Teorema della permanenza del segno $\delta > 0$ tale che $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Quindi per $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ si ha $f'(x) < 0$, ovvero la funzione è decrescente in $]x_0 - \delta, x_0[$, mentre per $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ si ha $f'(x) > 0$, ovvero la funzione è crescente in $]x_0, x_0 + \delta[$. Questo mostra che $f(x_0) < f(x)$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. $\square$

NOTA: questo teorema suggerisce un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili. Attenzione però : la condizione è solo sufficiente (si consideri la funzione x^4 nel punto 0).

$f(x) = x^4$ ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$ ($f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$); ma $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, quindi $f'(0) = f''(0) = 0$

$$\boxed{C^\infty(I) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} C^k(I).}$$

NOTA: 1) le inclusioni sopra descritte sono strette. PER ESERCIZIO: fornire un esempio di funzione in $C^k(I)$ ma non in $C^{k+1}(I)$;

2) l'esistenza della derivata k-ima implica la continuità della derivata $k-1$-ima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti;

3) i polinomi, gli esponenziali, i logaritmi, sin, cos,... sono funzioni C^∞. PER ESERCIZIO: calcolarne tutte le derivate;

4) dai teoremi di linearità delle derivate, si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k.

5) se $f, g \in C^k(I)$, allora anche $fg \in C^k(I)$, e si ha

$$(fg)^{(k)} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} f^{(n)} g^{(k-n)};$$

6) composizione di funzioni C^k è ancora C^k.

Il Teorema di De L'Hôpital

Teorema. *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ funzioni definite e derivabili in un intorno destro I di $x_0 \in [-\infty, +\infty[$ con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.* $x \neq x_0$ *Supponiamo che sia verificata una delle due condizioni:*

i) (forma $0/0$) $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} g(x) = 0$;

ii) (forma ∞/∞) $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} g(x) = \infty$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Le stesse conclusioni sono valide per il limite $x \to x_0-$ (se f, g sono definite in un intorno sinistro di $x_0 \in]-\infty, +\infty]$), oppure per il limite $x \to x_0$ (se f, g definite in un intorno completo di $x_0 \in \mathbb{R}$)

Dim. (solo forma $0/0$ e $x_0 \in \mathbf{R}$) Usando la caratterizzazione di limite per successioni, basta dimostrare che per ogni successione $\{x_n\} \subset I$ che tende a x_0+ si ha

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

Possiamo supporre che le funzioni f, g siano definite anche in x_0 e $g(x_0) = f(x_0) = 0$. Applichiamo allora il

teorema di Cauchy con $a = x_0$, $b = x_n$. Otteniamo che esiste $\xi_n \in]x_0, x_n[$ tale che

$\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Notiamo che per il Teorema dei due carabinieri si ha $\xi_n \to x_0+$, e quindi

$$L = \lim_n \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)}. \qquad \square$$

ESEMPI: Tramite questo teorema possiamo ritrovare la maggior parte dei limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = (\frac{0}{0}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$f(x) = \sin x$
$g(x) = x$
$x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (\frac{0}{0}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1;$$

$f(x) = e^x - 1$
$g(x) = x$
$x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = (\frac{0}{0}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = (\frac{+\infty}{+\infty}) = (H) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty;$$

$f(x) = e^x$
$g(x) = x$
$x_0 = +\infty$

$$(\alpha > 0) \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = (\frac{+\infty}{+\infty}) = (H) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x \log|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1/x} = (\frac{-\infty}{+\infty}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Il Teorema di De L'Hôpital può semplificare il calcolo di limiti complicati:

$f(x) = \log(\sin x^2 + \cos x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\sin x^2 + \cos x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) =$$

$g(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{2x\cos x^2 - \sin x}{\sin x^2 + \cos x}\right)}_{= f'(x)} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{= g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2 - \sin x}{2x} =$$

$g'(x) = 2x \neq 0$ per $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\cos x^2}_{\to 1} - \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{\to 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Attenzione però a non "eccedere" nell'uso: il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5$$

è banalmente uguale a 1 (applicando il limite fondamentale e la continuità di y^5); si può anche risolvere usando solo il teorema di De L'Hôpital, ma si deve derivare 5 volte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} = (H)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\sin^4 x\cos x}{5x^4} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3 x\cos^2 x - \sin^5 x}{4x^3} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12\sin^2 x\cos^3 x - 8\sin^4 x\cos x - 5\sin^4 x\cos x}{12x^2} =$$

...

Il Teorema di De L'Hôpital fornisce solo una condizione sufficiente per l'esistenza del limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Siano:

$$f(x) = x + \sin x\,, \qquad g(x) = 2x + \cos x\,,$$

e $x_0 = +\infty$.

Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{2-\sin x}$$

NON ESISTE.

Tuttavia, si calcola:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\cos x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\substack{0 \\ x\to+\infty}}}{2+\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\substack{x\to+\infty \\ 0}}} = \frac{1}{2}\,.$$

Vediamo ora un risultato di interesse pratico che segue dal Teorema di De L'Hôpital.

Teorema. (del limite della derivata). *Sia* $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ *continua in* a *e derivabile in* $]a, b[$. *Se esiste (finito o no)* $\lim_{x \to a+} f'(x)$, *allora esiste anche* $f'_+(a)$ *e vale*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Dim. $\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (H) = \lim_{x \to a+} f'(x).$

$\square$

ESEMPIO: utilizzando il Teorema precedente dimostriamo che la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & se\ x \neq 0 \\ 0 \quad se\ x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞ in $\mathbf{R}$.

Naturalmente occorre controllare la regolarità in $x = 0$. f è cont. in $x=0$.

È $f'(x) = \frac{2\exp(-1/x^2)}{x^3}$ per $x \neq 0$ e $\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = 0$.

Grazie al Teorema precedente, si ha $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$ cioè f è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Reiterando il ragionamento ed applicando il Teorema a f', f'', ... si conclude che f è infinitamente derivabile in $\mathbf{R}$.

ESEMPIO: Sia $f(x) = \arcsin x$. Per $x \in]-1, 1[$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \quad \Rightarrow \quad f'_-(1) = +\infty$

NEL TEOREMA PRECEDENTE L'ESISTENZA DEL LIMITE $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ È <u>SOLO</u> UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE!

1.
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$ $\qquad$ $\nexists f'(0)$

2.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$$
$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$ MA $\exists f'(0) = 0$