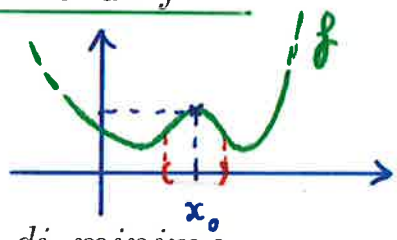
ESTREMI RELATIVI

Def. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice un *punto di massimo relativo* o un *punto di massimo locale* quando esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $I \cap A$; ovvero



$$\boxed{\forall\, x \in A \cap I \text{ si ha } f(x) \leq f(x_0).}$$

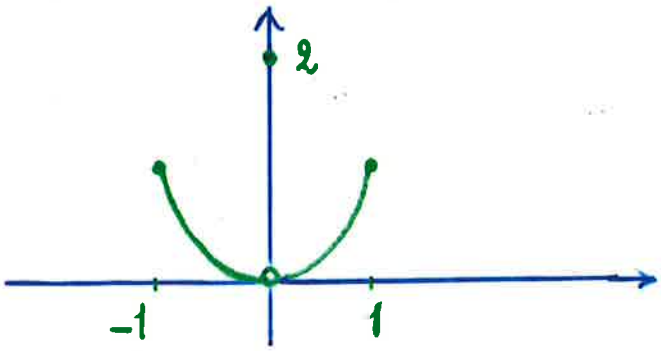
Analogamente diciamo che x_0 è un *punto di minimo relativo* o un *punto di minimo locale* quando esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di minimo per la restrizione di f a $I \cap A$; ovvero

$$\boxed{\forall\, x \in A \cap I \text{ si ha } f(x) \geq f(x_0).}$$

Un punto si dice *di estremo relativo* o *di estremo locale* se è punto di massimo locale o di minimo locale.

NOTA: se x_0 è un punto di massimo per f su A, allora è anche punto di massimo relativo; se vogliamo distinguere le due cose si parlerà di *punto di massimo assoluto.*

ESEMPI: 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Allora $-1, 0, 1$ sono punti di massimo relativo; di questi 0 è punto di massimo assoluto;



2) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1 \\ 1/x^2 & \text{se } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. 0 è punto di minimo assoluto; 1 e -1 sono punti di massimo relativo ma non assoluto.

3) $f(x) = \cos x$; tutti i punti della forma $2k\pi$ sono punti di massimo assoluto, tutti i punti della forma $(2k+1)\pi$ sono punti di minimo assoluto;

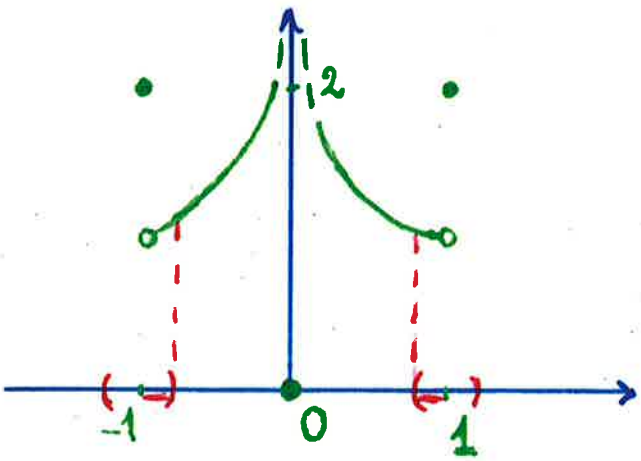
4) $f(x) = [x]$ (parte intera). Tutti i punti $x \in \mathbf{R}$ sono punti di massimo relativo; tutti i punti $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ sono punti di minimo relativo;

5) $f(x) = \sqrt{|x|}$. Il punto 0 è l'unico punto di minimo (assoluto e relativo); è anche un punto di cuspide;

6) $f(x) = \min\{|x|, |x-2|+1\}$. Il punto 0 è punto di minimo assoluto; il punto 2 è punto di minimo relativo. Notare che la funzione non è derivabile in 0 e 2.

7) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ -x & \text{se } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. La funzione non ha punti di massimo e minimo assoluti. 1 è punto di minimo relativo; -1 è punto di massimo relativo.

2)



Punti stazionari

Def. x_0 è punto stazionario di $f \iff f'(x_0) = 0$.

ESEMPI: 1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x \implies 0$ è l'unico punto stazionario (e di minimo assoluto)

2) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \implies 0$ è l'unico punto stazionario (ma non è punto di estremo relativo);

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ 0 è punto stazionario.

Teorema. *(di Fermat) Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in]a, b[$ un punto di estremo relativo per f in cui esiste $f'(x_0)$; allora x_0 è punto stazionario di f.* $(f'(x_0) = 0)$.

Dim. (x_0 punto di min. rel.) $\exists \delta > 0$ tale che se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, allora $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Quindi $rf(x, x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x_0 + \delta > x > x_0. \end{cases}$ Dunque passando al limite per $x \to x_0 \pm$ si ha $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$. Quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. $\square$

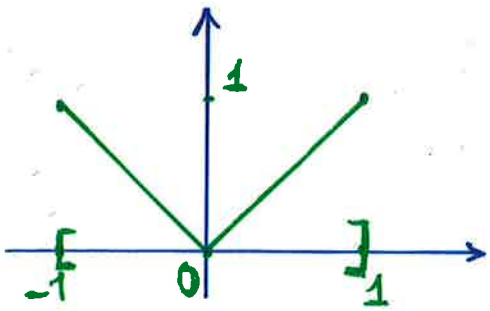
Questo teorema ci dà una "ricetta" per la ricerca di estremi (relativi) ma *solo in punti interni al dominio e in cui f è derivabile.*

NOTA: abbiamo dimostrato qualcosa di più:

"*Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in [a, b]$ un punto di estremo*

Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

$f'_-(1) = 1 \qquad f'_+(-1) = -1$



relativo per f in cui esistono le derivate destra e/o sinistra.

i) se x_0 è punto di minimo relativo allora $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$;

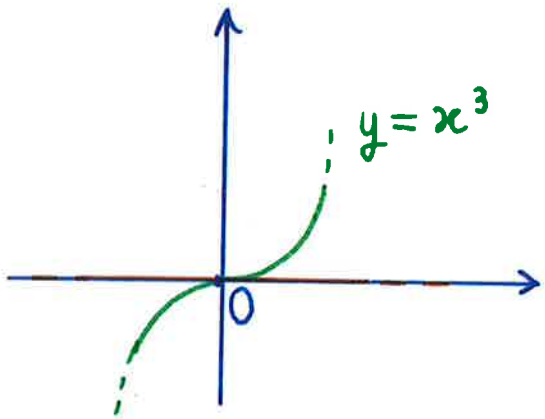
i) se x_0 è punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$."

Derivate di funzioni monotone.

Dalle proprietà del rapporto incrementale si ha subito:

Teorema. *Sia f una funzione non decrescente (risp. non crescente) e $x \in \operatorname{dom} f$ tale che $\exists\ f'(x)$. Allora $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$).*

NOTA: se f è strettamente crescente non è vero che $f'(x) > 0$. Per esempio si consideri $f(x) = x^3$ e $x = 0$.



$f(x) = x^3$ strettamente crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$), ma $f'(0) = 0$.

NOTA: $x_0 = 0$ è un punto stazionario di $f(x) = x^3$, ma non è un punto di estremo relativo (è un punto di FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$ t.c. $\exists\ f'(x_0)$

x_0 p.to di estr. relativo $\Longrightarrow$ x_0 p.to stazionario

$\not\Longleftarrow$