Def. Sia I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ e x_0 un punto di I. Se esiste il limite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0-} rf(x, x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},}$$

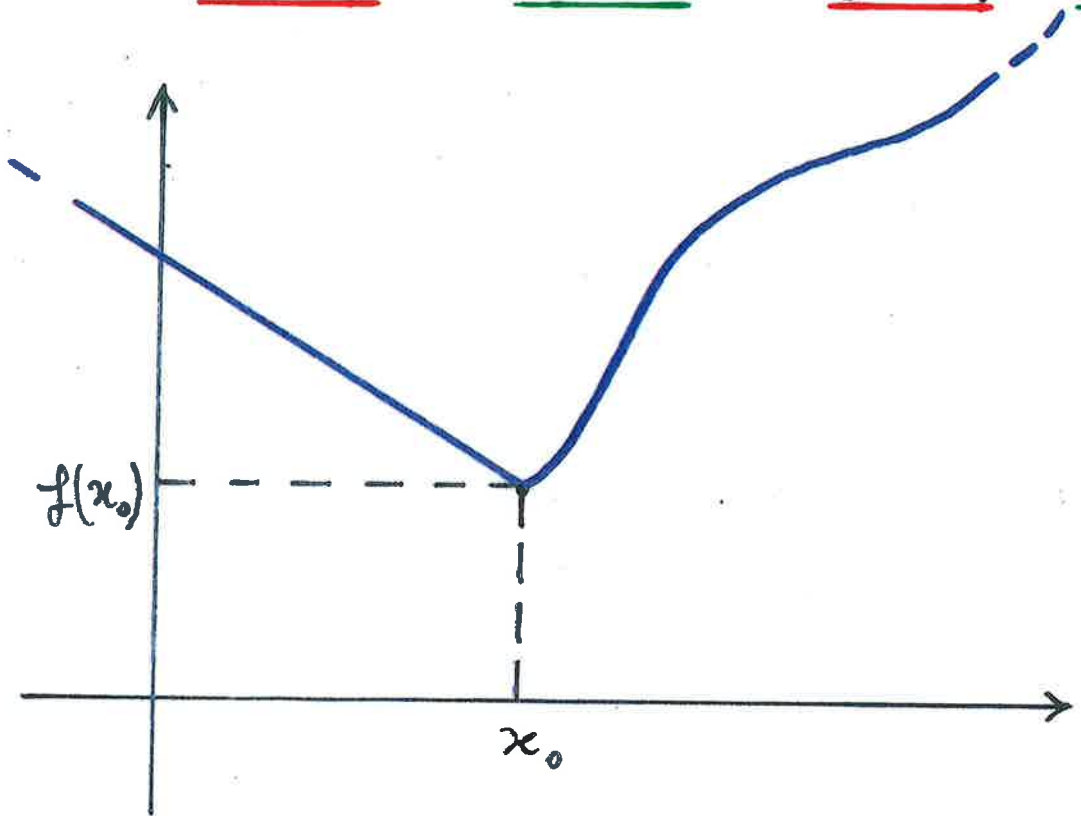
esso viene chiamato la *derivata sinistra* di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

Se esiste il limite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0+} rf(x, x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},}$$

esso viene chiamato la *derivata destra* di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

Caso in cui $f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$



Def. Sia I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ e x_0 un punto di I. Se esiste il limite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0-} rf(x, x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},}$$

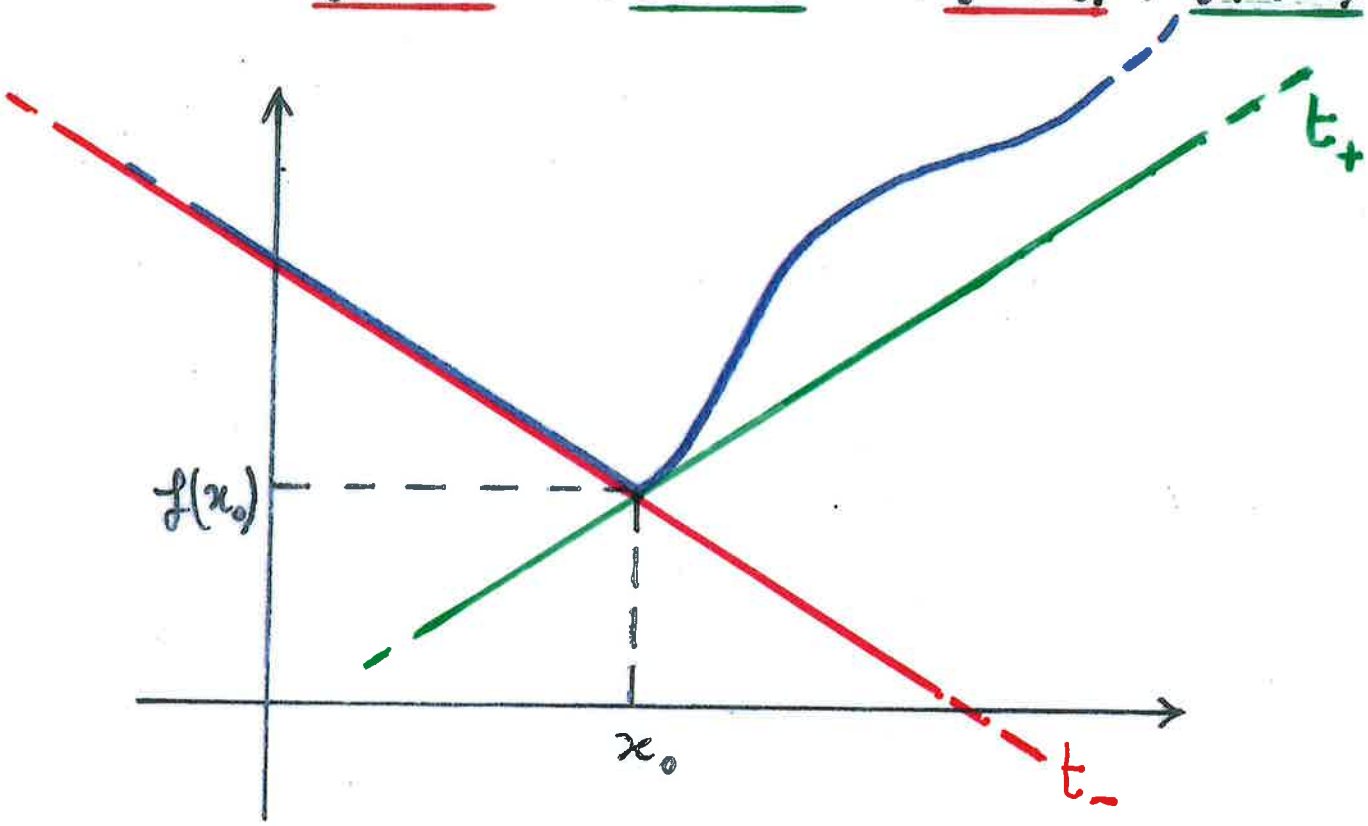
esso viene chiamato la *derivata sinistra* di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

Se esiste il limite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0+} rf(x, x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},}$$

esso viene chiamato la *derivata destra* di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

Caso in cui $f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$



$t_- : y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

$t_+ : y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$

$$rf(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{c-c}{x-y}=0$$

ESEMPI: 1) $f = c$ costante $Dc = 0$ in ogni punto. Infatti per ogni coppia di punti $rf(x, y) = 0$.

2) $f(x) = x$. Allora $rf(x, y) = 1$ per ogni coppia di punti, per cui $f'(x) = 1$ per ogni x.

$$rf(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x-y}{x-y}=1$$

3) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geq 2)$. Allora

$$rf(x, y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1},$$ per cui $f'(x) = nx^{n-1}$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Allora $(x_0 \neq 0)$ $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(1/x) - (1/x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)/(x_0 x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x_0 x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

5) $f(x) = |x|$. Sia $x_0 > 0$; allora

$$rf(x, x_0) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$ per tutti gli $x > 0$, per cui $f'(x_0) = 1$. Se invece $x_0 < 0$,

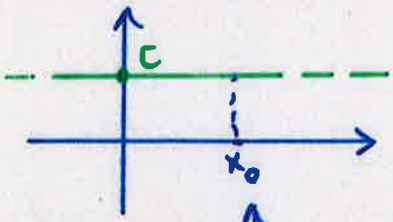
$$rf(x, x_0) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1$$ per tutti gli $x < 0$, per cui $f'(x_0) = -1$.

Se $x_0 = 0$ si ha $rf(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$

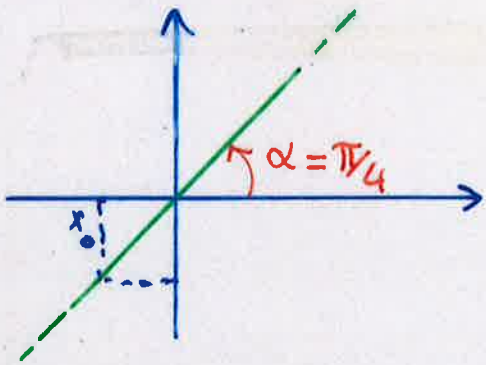
$$rf(x,0)=\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}$$

per cui $f'_-(x_0) = -1$ e $f'_+(x_0) = 1$; in particolare non esiste $f'(x_0)$.

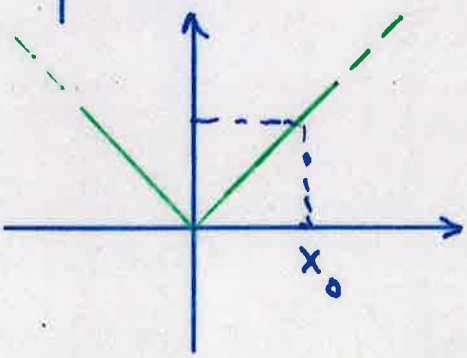
1)



2)



5)



3) $f(x) = x^n$

$$rf(x,y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} \quad , \quad x \neq y$$

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$rf(x,y) = \overbrace{\underline{\underline{x}}^{n-1} + \underline{\underline{x}}^{n-2}\underset{\downarrow\, x}{y} + \dots + \underline{\underline{x}}\,\underset{\downarrow\, x^{n-2}}{y^{n-2}} + \underset{\downarrow\, x^{n-1}}{y^{n-1}}}^{n \text{ termini}}$$

$y \to x$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} rf(x,y) = n x^{n-1}$$

6) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{-\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Quindi $f'(0) = +\infty$, e f non è derivabile in 0.

7) $f(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (funzione di Heaviside). Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0;$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{0 - 1}{x - 0} = +\infty.$$

LA FUNZIONE DERIVATA

Def. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$I' = \{x \in I : \ f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset,$$

allora si chiama *derivata di f* la funzione $f' : I' \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ che associa ad ogni punto $x \in I'$ la derivata di f in x.

ESEMPI: 1) $f(x) = x$, $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = \mathbf{R}$; $f' = 1$;

2) $f(x) = |x|$, $\operatorname{dom} f' = \mathbf{R}\setminus\{0\} \neq \operatorname{dom} f = \mathbf{R}$; $f' = \dfrac{x}{|x|}; = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

3) $f(x) = H(x)$. $\operatorname{dom} f' \neq \operatorname{dom} f = \mathbf{R}$ in quanto $0 \notin \operatorname{dom} f'$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Classificazione dei punti di non derivabilità

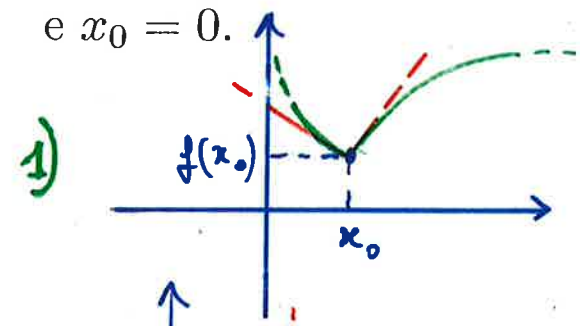
Se la funzione f *non* è derivabile in un punto x_0 si possono presentare vari casi. Se f è continua in x_0 allora si usa la seguente nomenclatura:

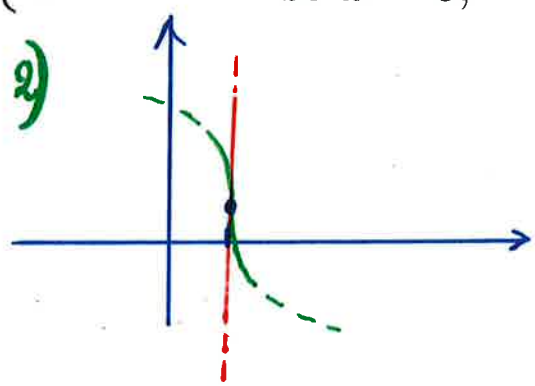
1) $\exists\ f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbf{R}}$ e almeno uno dei due è finito. Allora x_0 si dice un *punto angoloso*;

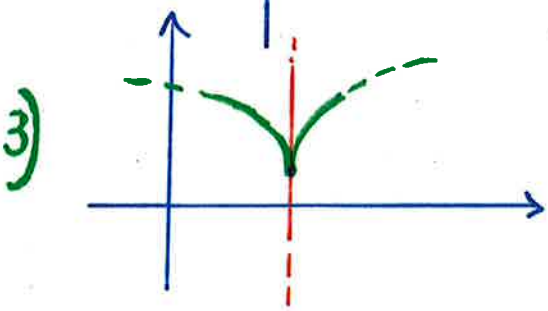
2) $\exists\ f'(x_0) = \pm\infty$; allora x_0 si dice un *punto di flesso a tangente verticale*;

3) $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$; allora x_0 si dice una *cuspide*.

NOTA: possono anche non esistere $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$; per esempio si prenda $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e $x_0 = 0$.







Gli esempi appena considerati mostrano che una funzione continua può essere non derivabile. Al contrario, *una funzione derivabile in un punto x_0 è continua in x_0.*

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$.

Teorema. *f derivabile in x_0 $\Longrightarrow$ f continua in x_0.*

Dim. Per $x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Quindi, $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$ $\square$

La DERIVABILITÀ di f in x_0 è CONDIZIONE SUFFICIENTE per la CONTINUITÀ di f in x_0: DER. $\Rightarrow$ CONT.

La CONTINUITÀ di f in x_0 è CONDIZIONE NECESSARIA per la DERIVABILITÀ di f in x_0: NO CONT. $\Rightarrow$ NO DER.

Derivate di funzioni elementari

$D(e^x) = e^x$,	$D1 = 0$
$(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$	$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$,
$D \cos x = -\sin x$	$D \sin x = \cos x$
$D \tan x = 1 + \tan^2 x$	
$D \cosh x = \sinh x$	$D \sinh x = \cosh x$

ESEMPIO: calcoliamo la derivata di e^x. Si ha

$$r(\exp)(x, x_0) = \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\left(\frac{e^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0}\right).$$

Dunque dobbiamo calcolare il limite $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}$. Cambiamo variabili:

$$e^t - 1 = y, \text{ ovvero } t = \log(1+y).$$

Il limite diventa $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y\to 0} 1/\log(1+y)^{\frac{1}{y}}$.

Si vede che $\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$, per cui il nostro limite vale $1/\log e = 1$. Dunque $De^x = e^x$.

ESEMPIO: usando il limite fondamentale $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ possiamo calcolare la derivata di $\sin x$ e $\cos x$. Per esempio, si ha

$$\begin{aligned} D\sin x &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin x \cos t + \sin t \cos x - \sin x}{t} \\ &= \cos x \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} + \sin x \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \cos x \end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2 t - 1}{t(\cos t + 1)} = \\ &= -\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\cos t + 1} = 0. \end{aligned}$$

$x_0 \in I = [a,b]$ interno ad I se $x_0 \notin \{a,b\}$.

Calcolo di derivate

Dal teorema di linearità per i limiti si ha subito:

Teorema. (LINEARITÀ) *Sia I intervallo e x_0 punto interno a I. Se $f, g : I \to \mathbf{R}$ sono derivabili in x_0 e $c \in \mathbf{R}$, allora sono derivabili in x_0 anche $f+g$ e cf e si ha*

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = c(f'(x_0)).}$$

Teorema. (DERIVATA DI COMPOSIZIONE) *Siano I e J intervalli; $f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}$ x_0 un punto interno a I tale che $f(x_0)$ è interno a J. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).}$$

Dim. Supponiamo che per $x \neq x_0$ si abbia $f(x) \neq f(x_0)$. Allora, per $x \neq x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$, si ottiene la tesi.
In generale, però, potrà essere $f(x) = f(x_0)$ anche per $x \neq x_0$ e quindi non si potrà moltiplicare e dividere per $f(x) - f(x_0)$. Usiamo allora questo "trucco".

Sia $h : J \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & se\ y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & se\ y = f(x_0). \end{cases}$$

Per $x \neq x_0$ (scegliendo $y = f(x)$) vale

$$(*) \qquad \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Osserviamo ora che dalla derivabilità di g in $f(x_0)$ segue la continuità di h in $f(x_0)$. Quindi (composizione di funzioni continue)

$$\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = h(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

Così, passando al limite in $(*)$ per $x \to x_0$, si ottiene la tesi. $\square$

ESEMPI: 1) $n \in \mathbf{N}$ $D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$. La funzione $x \mapsto x^{-n}$ si può considerare come composizione delle funzioni $f(x) = x^n$ e $g(y) = 1/y$; e sappiamo che $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(y) = -1/y^2$. Dunque

$$D(x^{-n}) = g'(f(x))\, f'(x) = -\frac{1}{(x^n)^2}\,(nx^{n-1}) = -nx^{-n-1};$$

2) $D\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2}\, f'$ (considerare $\dfrac{1}{f}$ come composizione di f e $1/y$).

1) $x \xrightarrow{f} x^n \xrightarrow{g} \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\qquad x \neq 0$

Teorema. (DERIVATA DEL PRODOTTO) *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ derivabili in $x_0 \in I$; allora anche fg è derivabile in x_0, e si ha*

prodotto aritmetico!!

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).}$$

formula di Leibniz

Dim. $\dfrac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f(x)\dfrac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + g(x_0)\dfrac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$, per cui

$$r(fg)(x, x_0) = \underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)}\underbrace{rg(x, x_0)}_{\to g'(x_0)} + g(x_0)\underbrace{rf(x, x_0)}_{\to f'(x_0)}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$ (ricordando che $f(x) \to f(x_0)$) si ha la tesi. $\square$

ESERCIZIO:1) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, se $g(x_0) \neq 0$

(Applicare la derivazione del prodotto di f e $1/g$ ricordando che $D(g^{-1}) = -g^{-2}g'$).

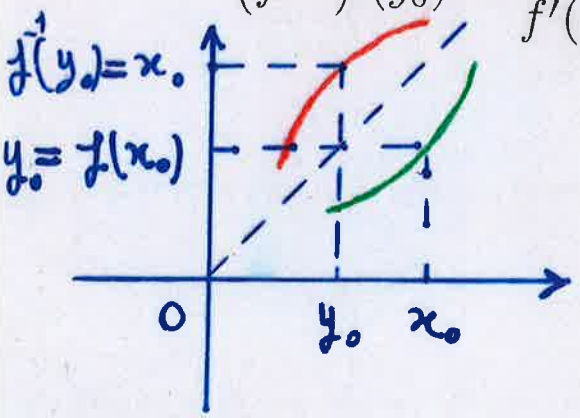
Teorema. (DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA) *Sia I intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ continua e invertibile in I. Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha*

$$\boxed{D(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}} \quad \text{ovvero} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

convenzione:

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow D(f^{-1})(y_0) = (\pm)\infty$

$f'(x_0) = \pm\infty \Rightarrow D(f^{-1})(y_0) = 0$



NOTA: 1) l'ipotesi di invertibilità su f equivale alla stretta monotonia;

2) la formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0) = \pm\infty$, applicando le dovute convenzioni.

3) se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$.

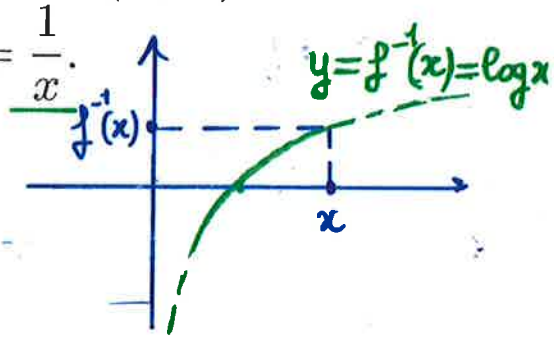
Dim. si ha $\lim_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

per il teorema sul limite di composizione. $\square$

Ora possiamo calcolare la derivata di $\log x$, usando il teorema della derivata della funzione inversa, con $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \log x$. Si ha allora $D(\log x) = D(f^{-1})(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\exp(\log x)} = \dfrac{1}{x}$.



ESERCIZI:1) $D(\log f) = \dfrac{f'}{f}$;

2) $D(e^f) = e^f f'$;

3) $D(x^\alpha) = D(e^{(\alpha \log x)}) = x^\alpha D(\alpha \log x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ (con $\alpha \neq 1$).

3) $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = g(f(x))$, $f(x) = \alpha \log x$, $g(y) = e^y$

$D(x^\alpha) = g'(f(x))\, f'(x)$ $\quad f'(x) = \alpha \frac{1}{x} = \frac{\alpha}{x}$ $\quad g'(y) = e^y$

$\Rightarrow D(x^\alpha) = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

Derivate delle funzioni inverse

$\forall x>0$: $D(\log x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad D\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$D(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \forall x \in]-1,1[$

$\forall x \in]-1,1[$

(si intende che x appartiene al dominio della singola funzione). Per $x = \pm 1$ $D(\arcsin x) = +\infty$, $D(\arccos x) = -\infty$

ESERCIZIO: ottenere le formule di derivazione delle funzioni trigonometriche inverse usando il teorema della derivazione dell'inversa.

ESEMPI: 1) $D(\sin 2x) = (\cos 2x)\, 2$;

2) $D(\log\cos x) = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$;

3) calcolare la derivata di $(\log x)^{\sqrt{x}}$ $(x > 1)$: possiamo scrivere

$$(\log x)^{\sqrt{x}} = \exp\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big).$$

Si ha

$$D\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big) = \log(\log x)Dx^{1/2} + x^{1/2}D\log(\log x).$$

Dato che

$Dx^{1/2} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $D\log(\log x) = \dfrac{1}{\log x}\dfrac{1}{x}$, si ha dunque

$$D\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big) = \log(\log x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{1/2}\frac{1}{x\log x} =$$
$$\frac{\log x\ \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}\ \log x},$$ e infine

$$D(\log x)^{\sqrt{x}} = \exp\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big)\frac{\log x\ \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}\ \log x} =$$
$$(\log x)^{(\sqrt{x}-1)}\ \frac{\log x\ \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

ESERCIZIO: verificare la formula generale per la derivata di f^g (scrivere $f^g = \exp(g\log f)$...):

$$D(f^g) = f^g\big(\frac{f'g}{f} + g'\log f\big).$$

Derivazione della funzione reciproca e del quoziente

Teorema. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale, x_0 un punto interno ad I e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0, con $g(x_0) \neq 0$. Allora le funzioni $\dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$ sono derivabili in x_0 e si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,; \\ &(2)\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,. \end{aligned}}$$

Dimostrazione. Si noti per prima cosa che la derivabilità di g in x_0 implica la continuità di g in x_0; inoltre, poiché $g(x_0) \neq 0$, il Teorema di permanenza del segno delle funzioni continue assicura che la funzione g si mantenga diversa da zero in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 contenuto in I, cioè in un intervallo

della forma $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ (con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo). Di conseguenza, le funzioni

$$\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

sono ben definite per qualsiasi $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.
La formula 1. è una conseguenza della formula di derivazione delle funzioni composte. Si osserva infatti che

$$\frac{1}{g}(x) = (r \circ g)(x) = r(g(x)), \quad \forall\, x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[,$$

dove $r(y) = \dfrac{1}{y}$, per $y \neq 0$, è la funzione di *passaggio al reciproco*. Poiché g è derivabile in x_0 e r è derivabile in $g(x_0) \neq 0$ (si ricordi che $r'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$ per $y \neq 0$), il Teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che $r \circ g$ sia derivabile in x_0; inoltre, si calcola

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = (r \circ g)'(x_0) = r'(g(x_0))g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Verifichiamo adesso la seconda parte dell'enunciato. Da quanto precede, deduciamo che, nelle ipotesi fatte, sono derivabili in x_0 le funzioni f e $\frac{1}{g}$; pertanto il Teorema di derivazione del prodotto di funzioni derivabili, applicato ad f e $\frac{1}{g}$, implica che la funzione $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ sia anche derivabile in x_0 e, usando la formula di Leibniz e la (1) abbiamo:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g}(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Formule di derivazione

Attenzione! Le formule del calcolo delle derivate si possono utilizzare solo per il calcolo di derivate *la cui esistenza è già nota*; in altre parole, le formule di derivazione *non si possono utilizzare* per verificare l'*esistenza* delle derivate.
Consideriamo, per esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{per } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{per } x = 0\,. \end{cases}$$

I Teoremi sulla derivazione del prodotto e della composizione di funzioni derivabili ci danno che la funzione f è derivabile per $x \neq 0$, e, con le formule di derivazione, otteniamo:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}$$

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0\,.$$

L'espressione predetta non è definita per $x = 0$; questo però non significa necessariamente che la derivata prima di f in $x = 0$ non esista! In $x = 0$ le ipotesi dei teoremi sul calcolo delle derivate *non sono soddisfatte* perchè la funzione $r(x) = \frac{1}{x}$ (coinvolta nell'espressione analitica di f) non è derivabile in $x = 0$; di conseguenza, le regole di derivazione, utilizzate nei passaggi precedenti per il calcolo di $f'(x)$ quando $x \neq 0$, non possono essere applicate nel calcolo di $f'(0)$. Ma i teoremi sul calcolo delle derivate forniscono solo delle condizioni *sufficienti* (*e non necessarie*) per l'esistenza delle derivate.
Si può anche osservare che, in questo caso, non esiste

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Nemmeno questo, però, ci permette di dedurre che $f'(0)$ non esiste.
Per verificare l'esistenza (o meno) della derivata prima di f in $x = 0$, dobbiamo ricorrere alla definizione di derivata prima cioè calcolare il limite del rapporto

incrementale

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Si trova così

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

da cui si conclude che $f'(0) = 0$.