FUNZIONI CONTINUE

Def. f è continua $\iff$ f è continua in ogni punto del suo dominio.

OSSERVAZIONE: f loc. Lipschitziana $\Longrightarrow$ f continua.

NOTA: polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche sono continue. $x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua (con dominio $\mathbf{R}\setminus\{0\}$), $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ è continua (con dominio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$).

Massimi e minimi

Def. Si chiama *massimo* di una funzione f il massimo valore di $f(x)$ con $x \in dom f$ (se esiste), ovvero

$$\boxed{\max f = \max\{f(x) : \ x \in dom f\}.}$$

Un punto x in cui $f(x) = \max f$ si dice *punto di massimo* per f. Perciò vale $f(x) \geq f(x')\ \forall x' \in dom f$.

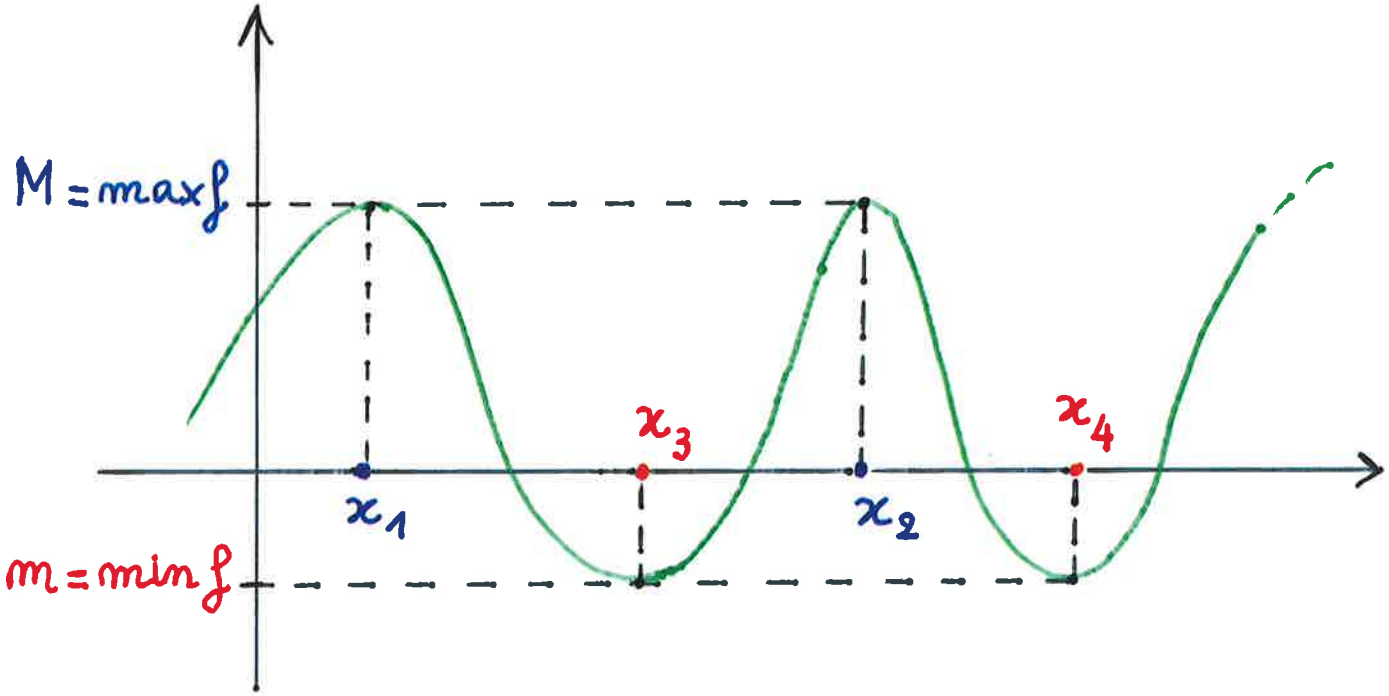
Si chiama *minimo* di una funzione f il minimo valore di $f(x)$ con $x \in dom f$ (se esiste), ovvero

$$\boxed{\min f = \min\{f(x) : \ x \in dom f\}.}$$

Un punto x in cui $f(x) = \min f$ si dice *punto di minimo* per f. Perciò vale $f(x) \leq f(x')\ \forall x' \in dom f$.

Allo stesso modo si definiscono l'*estremo superiore* di f $\sup f$ e l'*estremo inferiore* di f $\inf f$ (che esistono sempre).

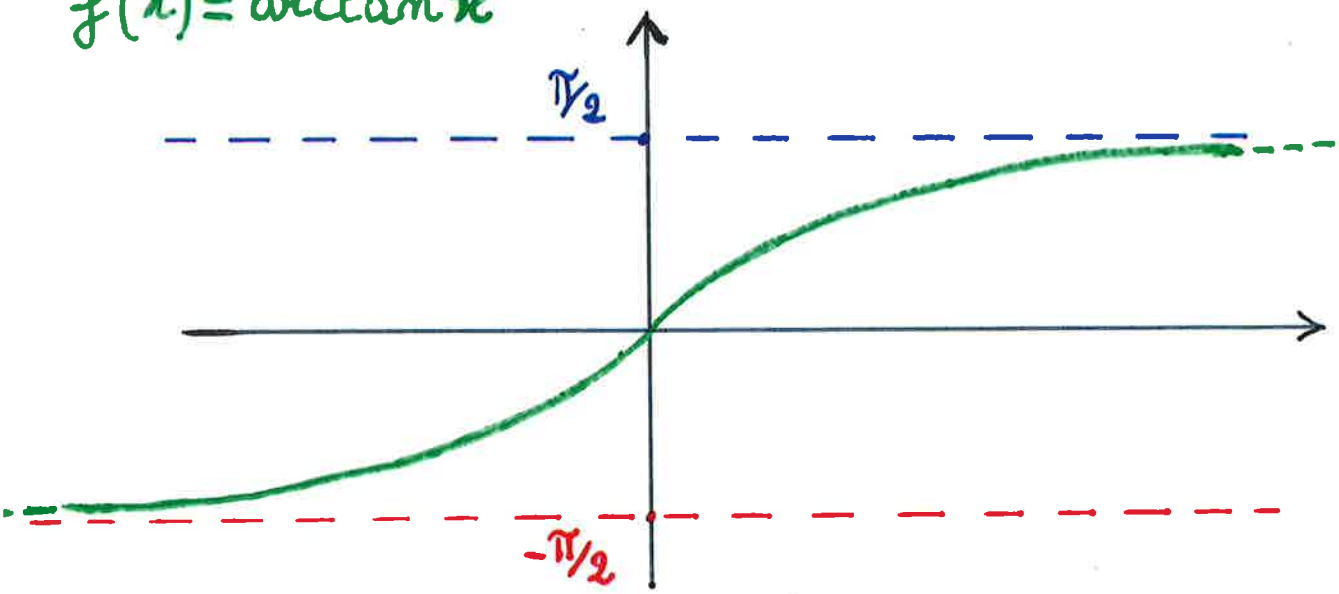
$$\boxed{\begin{aligned} \sup f &= \sup\{f(x) : x \in dom f\} \\ \inf f &= \inf\{f(x) : x \in dom f\} \end{aligned}}$$



x_1, x_2 p.ti di massimo $\left(f(x_1) = f(x_2) = M \right)$

x_3 x_4 p.ti di minimo $\left(f(x_3) = f(x_4) = m \right)$

$f(x) = \arctan x$

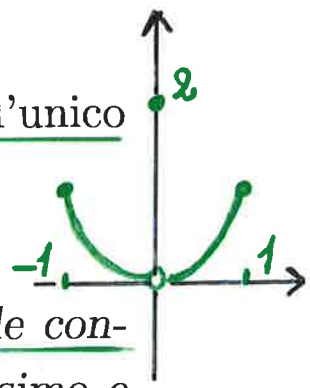


$\sup f = \pi/2$

$\inf f = -\pi/2$

$\nexists \max f$, $\min f$

ESEMPIO: sia $f = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$



f non ha minimo, e $\inf f = 0$. $\max f = 2$ e 0 è l'unico punto di massimo.

Teorema. (di Weierstrass). *Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.*

Dim. (per il min) Scegliamo quella che viene chiamata una "successione minimizzante", ovvero una successione $\{x_n\} \subset dom f$ tale che

$$\lim_n f(x_n) = \inf f.$$

Osserviamo che tale successione può essere costruita come segue.

- $\forall n \in \mathbf{N}$ scegliamo $x_n \in \mathrm{dom} f$ tale che $f(x_n) < -n$ se $\inf f = -\infty$;
- $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ scegliamo $x_n \in \mathrm{dom} f$ tale che $\inf f \leq f(x_n) < \inf f + \frac{1}{n}$ se $\inf f \in \mathbf{R}$ (ricordare la caratterizzazione di estremo inferiore di un insieme (vedere il Teorema a pag. 19)).

In entrambi i casi, si ha $\lim_n f(x_n) = \inf f$.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass possiamo estrarre da $\{x_n\}$ (che è limitata poichè $\{x_n\} \subset dom f$) una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}$.

(se $\mathrm{dom} f = [a,b]$, allora $x_n \in \mathrm{dom} f$ $\iff a \leq x_n \leq b$, $\forall n$)

Sia $x = \lim_k x_{n_k}$.
Dato che $dom f$ è un intervallo chiuso, si ha $x \in dom f$ (se $dom f = [a, b]$ si ha $a \leq x_{n_k} \leq b$ per ogni n_k e quindi anche $a \leq x \leq b$).

Per la continuità di f si ha $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x)$. Inoltre, $\{f(x_{n_k})\}$ è una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$. Quindi $\lim_k f(x_{n_k}) = \inf f$, cioè $f(x) = \inf f = \min f$. $\square$

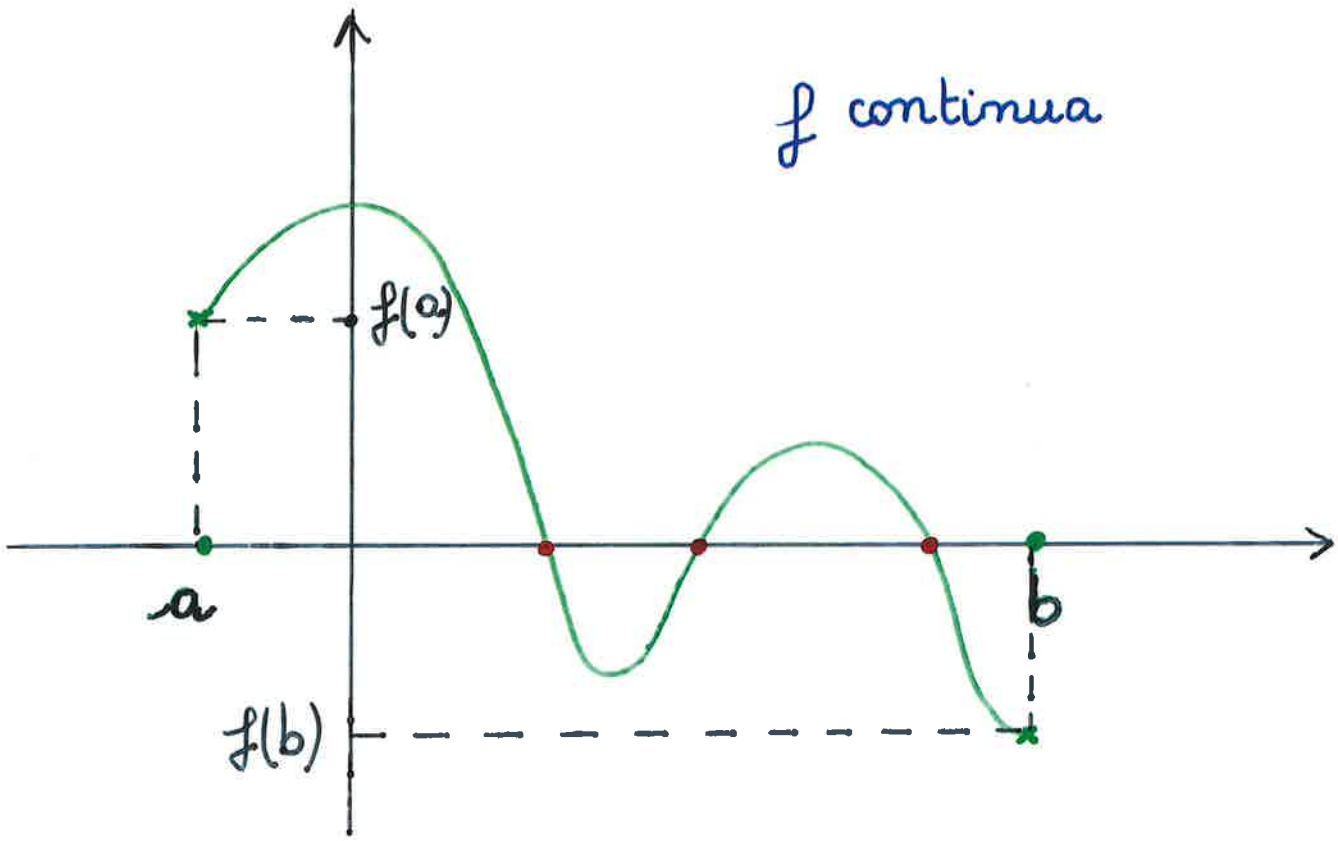
NOTA: nell'esempio precedente il teorema non si può applicare perchè f è discontinua in 0. Notare che per tale funzione tutte le successioni minimizzanti tendono a 0.

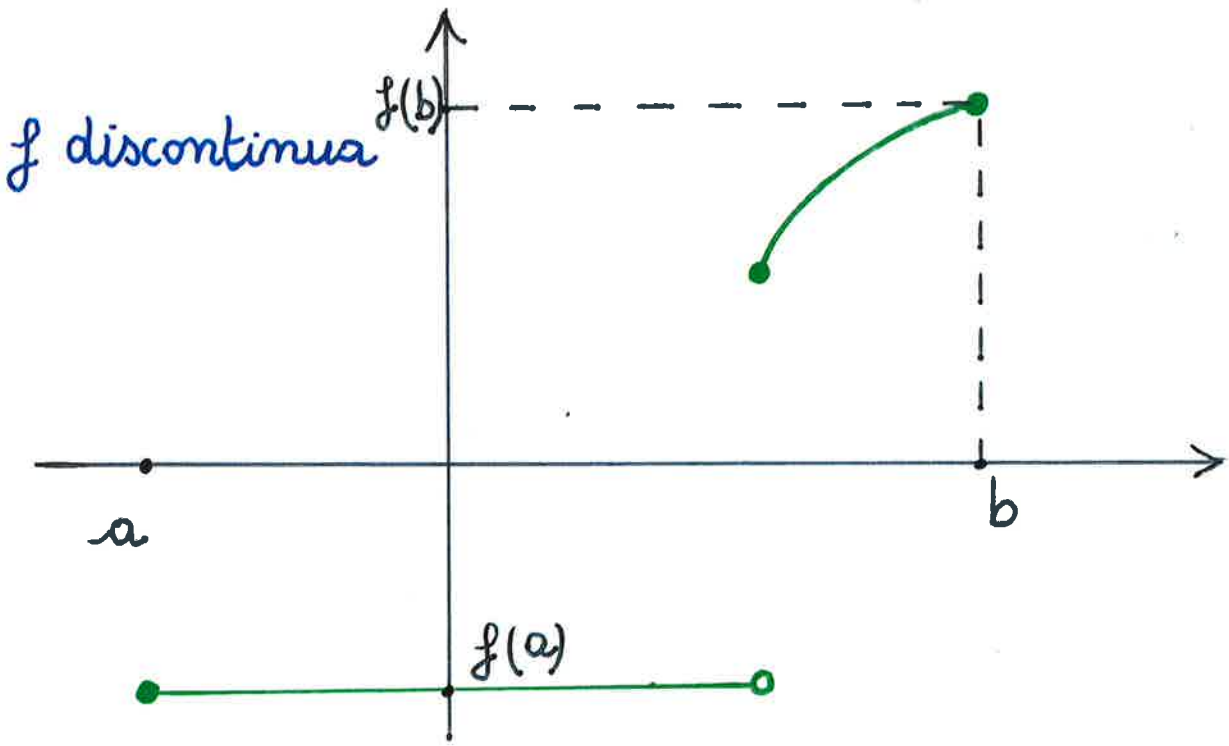
Corollario. Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata. (se $m = \min f$ e $M = \max f$ allora $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in dom f$).

Teorema. (di Bolzano o "degli zeri") *Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.*

Dim. Si procede in maniera simile alla dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass. Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Definiamo per induzione due successioni di punti di $[a, b]$ come segue: poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Quindi supponiamo di avere definito a_n e b_n in maniera tale


f continua
f(a)
a
b
f(b)


f discontinua
f(b)
a
b
f(a)

che $b_n - a_n = (b-a)2^{-n}$, $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$.
Consideriamo allora $x_n = \dfrac{b_n + a_n}{2}$, il punto di mezzo dell'intervallo $[a_n, b_n]$. Se $f(x_n) = 0$ abbiamo finito; altrimenti
Se $f(x_n) < 0$ poniamo $a_{n+1} = x_n$ e $b_{n+1} = b_n$.
Se $f(x_n) > 0$ poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = x_n$.
La successione così costruita ha le proprietà :

i) $\{a_n\}$ è non decrescente e $f(a_n) \leq 0$;
ii) $\{b_n\}$ è non crescente e $f(b_n) \geq 0$;
iii) $(b_n - a_n) = (b-a)2^{-n}$,

quindi $\exists c \in [a,b]$: $a_n \to c$ e $b_n \to c$. Per la continuità di f

$$0 \leq \lim_n f(b_n) = f(c) = \lim_n f(a_n) \leq 0,$$

e quindi $f(c) = 0$. Dato che $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$ si ha $a < c < b$. $\square$

ALTRA DIMOSTRAZIONE

Dim. Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.
Sia $S = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \leq 0\}$. Osserviamo che S è non vuoto ($a \in S$) e sup. limitato. Sia $c = \sup S$.
Dimostreremo che $f(c) = 0$.
Per assurdo, sia $f(c) > 0$.
Per il Teorema della permanenza del segno, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$ $f(x) > 0$. Quindi, nessun punto

di S può stare a destra di $c-\delta$, cioè $x \leq c-\delta \ \ \forall x \in S$.
Allora, $c-\delta$ è un maggiorante per S (assurdo).
Supponiamo ora $f(c) < 0$.
Ancora per il Teorema della permanenza del segno,
$\exists \delta > 0 : \forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b] \ f(x) < 0$.
Quindi $\exists x > c : \ f(x) < 0$ (assurdo).
Allora $f(c) = 0$.
Inoltre, si ha $a < c < b$ perchè $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$. $\square$

NOTAZIONE: se $f : A \to B$ è una funzione e $C \subseteq A$, allora definiamo $f(C) = \{f(x) : \ x \in C\} \subseteq B$. In particolare $f(domf)$ si chiama anche l'*immagine* di f (imf).

Teorema. ("dei valori intermedi") *Sia I intervallo, e $f : I \to \mathbf{R}$ continua, allora $f(I)$ è un intervallo.*

Dim. Dobbiamo mostrare che se $y_1, y_2 \in f(I)$ e $y_1 < z < y_2$, allora $z \in f(I)$.

Siano $c, d \in I$ tali che $f(c) = y_1$, $f(d) = y_2$. Allora possiamo considerare la funz. $g(x) = f(x) - z$ sull'intervallo $[a,b] = [\min\{c,d\}, \max\{c,d\}]$. Si ha allora $g(a)g(b) < 0$ e g è continua. Per il teorema di Bolzano $\exists \ x \in]a,b[: g(x) = 0$, ovvero $f(x) = z$.

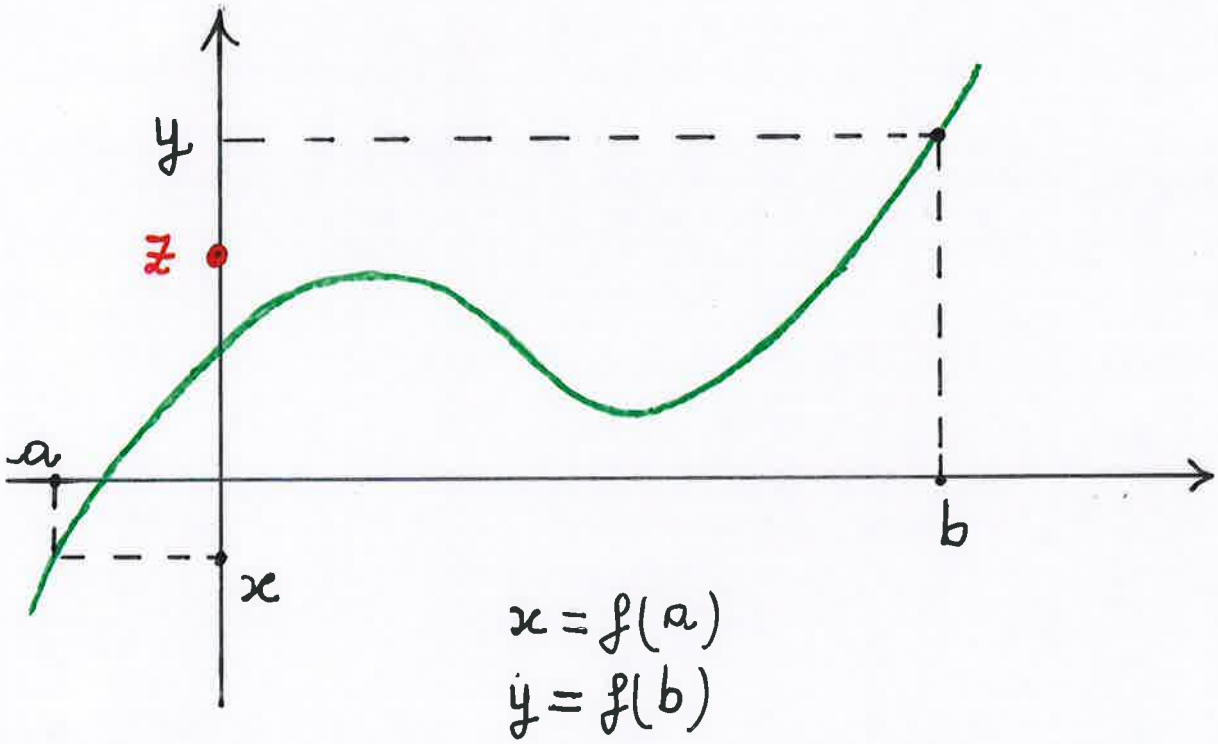
I intervallo $\Longrightarrow x \in I \Longrightarrow z \in f(I)$. $\square$

Ricordare che:

$$\boxed{J \subseteq \mathbb{R} \text{ è un } \underline{\text{intervallo}} \iff \forall\, x, y \in J \text{ con } x < y \text{ e } \forall\, z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < z < y, \text{ allora } z \in J}$$

Data $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f(I)$ intervallo significa allora che:

$\forall\, x, y \in f(I)$, con $x < y$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$ tale che $x < z < y$ allora $z \in f(I)$



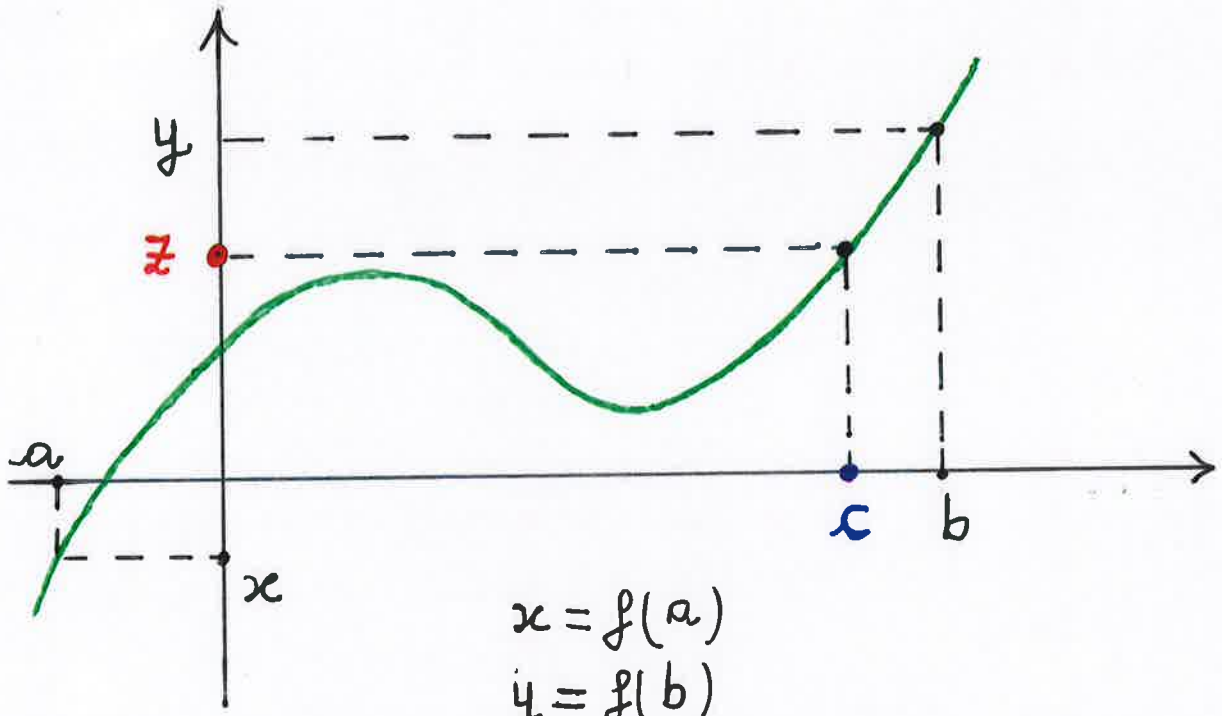
f assume <u>tutti</u> i valori compresi tra x e y.

Ricordare che:

$J \subseteq \mathbb{R}$ è un <u>intervallo</u> $\iff \forall\, x, y \in J$ con $x < y$ e $\forall\, z \in \mathbb{R}$ tale che $x < z < y$, allora $z \in J$

Data $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f(I)$ intervallo significa allora che:

$\forall\, x, y \in f(I)$, con $x < y$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$ tale che $x < z < y$ allora $z \in f(I)$



$x = f(a)$

$y = f(b)$

$\exists\, c \in I \;:\; z = f(c)$

f assume <u>tutti</u> i valori compresi tra x e y.

Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Poniamo

$$m = \min f, \quad M = \max f$$

(esistono per il teorema di Weierstrass). Dati $x_1, x_2 \in [a, b]$, supponiamo $f(x_1) \leq f(x_2)$. Poiché $f(x_1), f(x_2) \in f([a, b])$ (che è un intervallo) si ha

$$f([a, b]) \supseteq [f(x_1), f(x_2)].$$

→ f assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

Se, in particolare, x_1, x_2 sono punti di minimo e di massimo, otteniamo $(f(x_1) = m, \ f(x_2) = M)$

$$f([a, b]) = [m, M].$$

$f([a,b]) \supseteq [m, M]$

$f([a,b]) \subseteq [m, M]$, per definiz. di m e M

Vale perciò il seguente teorema.

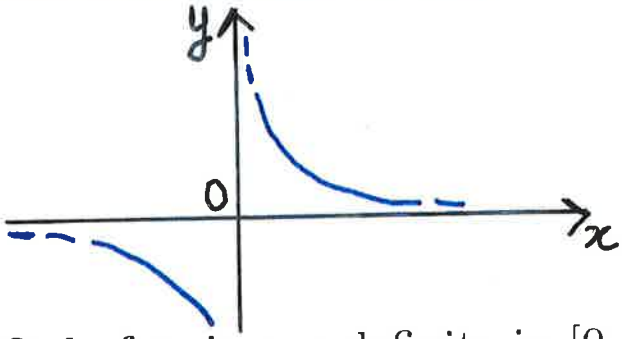
Teorema. *Le funzioni continue mandano intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati.*

INVERSIONE DI FUNZIONI CONTINUE

RICORDIAMO: Se A, B sono insiemi e $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, ovvero $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, allora la relazione $g(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b$ definisce una funzione $g : imf \to A$ (imf l'immagine di f). Questa funzione g si chiama la *funzione inversa* di f e viene denotata con f^{-1}. Una funzione iniettiva si dice anche *invertibile*.

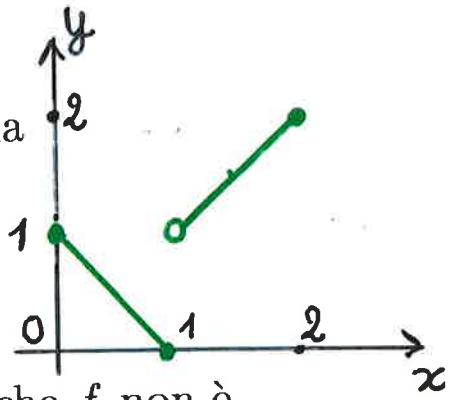
Ricordiamo che la stretta monotonia implica l'invertibilità. In generale, il viceversa non vale, come si può vedere dai seguenti esempi. f strett. crescente (decrescente) se $\forall x_1, x_2 \in dom f$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$

ESEMPIO: la funzione f definita in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ da $f(x) = 1/x$ è invertibile e non monotona. Osserviamo che il dominio di f non è un intervallo.



ESEMPIO: la funzione g definita in $[0, 2]$ da

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ x & se\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



è invertibile e non monotona. Osserviamo che f non è continua in $x = 1$.

Perchè valga il "viceversa" è quindi essenziale che f sia continua e definita in un intervallo.

Teorema. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è strettamente monotona. In tal caso $\mathrm{dom} f^{-1}$ è un intervallo e f^{-1} è continua.*

OSSERVAZIONE: grazie al Teorema, sono continue nel loro insieme di definizione:

le funzioni trigonometriche inverse $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$;

la funzione $\log_a x$ inversa di a^x;

la funzione $\sqrt[2n+1]{x}$ inversa di x^{2n+1};

la funzione $\sqrt[2n]{x}$ inversa della restrizione di x^{2n} all'intervallo $[0, +\infty[$.