PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LIMITI DI FUNZIONE

Teorema (CALCOLO DEI LIMITI).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L' .$$

Se non si hanno forme indeterminate, allora:

(1) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = L \pm L'$; $\leftarrow \begin{cases} + : L = \pm\infty \quad L' = \mp\infty \\ - : L = L' = \pm\infty \end{cases}$

(2) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot L'$; $\leftarrow L = 0 \quad L' = \pm\infty$

(3) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{L'}$. $\leftarrow \begin{cases} L = L' = 0 \\ L = \pm\infty \quad L' = \pm\infty \end{cases}$

(In (3) supponiamo $L' \neq 0$)

$\Downarrow$

$\exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A$ e $x \neq x_0$ $\quad g(x) \neq 0$

LIMITI DI FUNZIONE IN FORMA DI POTENZA E FORME INDETERMINATE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A, $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) > 0$ per $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$ (essendo I un intorno di x_0). Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in [0, +\infty] \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L' \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora:

1. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = L^{L'}$, se $L \in]0, +\infty[$, $L' \in \mathbb{R}$,

2. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$, se $\begin{cases} L \in]1, +\infty[, \ L' = +\infty, \\ L = +\infty, \ L' \in]0, +\infty], \\ L \in]0, 1[, \ L' = -\infty, \\ L = 0, \ L' \in [-\infty, 0[, \end{cases}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$, se $\begin{cases} L \in]1, +\infty[, \ L' = -\infty, \\ L = +\infty, \ L' \in [-\infty, 0[, \\ L \in]0, 1[, \ L' = +\infty, \\ L = 0, \ L' \in]0, +\infty]. \end{cases}$

La verifica delle relazioni di limite precedente si basa su:

1. L'identità $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ $(f(x) > 0$, per $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, con I intorno di $x_0)$;

2. Le proprietà seguenti:

a. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in [0, +\infty]$ (per $L = 0$, $f(x) > 0$, per $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, con I intorno di x_0)

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \log(f(x)) = \begin{cases} \log L\,, & \text{se } L \in]0, +\infty[\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ -\infty\,, & \text{se } L = 0\,. \end{cases}$$

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = \begin{cases} e^L\,, & \text{se } L \in \mathbb{R}\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ 0\,, & \text{se } L = -\infty\,. \end{cases}$$

Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ presenta:

1. La forma indeterminata 0^0, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$;
2. La forma indeterminata $+\infty^0$, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$;
3. La forma indeterminata $1^{\pm\infty}$, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.

CALCOLO DI LIMITI

OSSERVAZIONE: per i limiti di funzioni valgono, con la stessa dimostrazione, i teoremi (di linearità , del confronto, dei due carabinieri) già enunciati per i limiti di successioni. Di conseguenza, si hanno gli stessi teoremi anche per la continuità . In particolare:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in A$$

Teorema. *Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0. Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Corollario. I polinomi sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbf{R}$. Le funzioni razionali sono continue in ogni punto del loro dominio.

Dim. Le costanti e la funzione identità $x \mapsto x$ sono ovviamente continue. Basta quindi applicare il teorema precedente. $\square$

Proposizione. Gli esponenziali, sin, cos sono funzioni continue.

Dim. Per definizione sono (loc) Lipschitziane. □

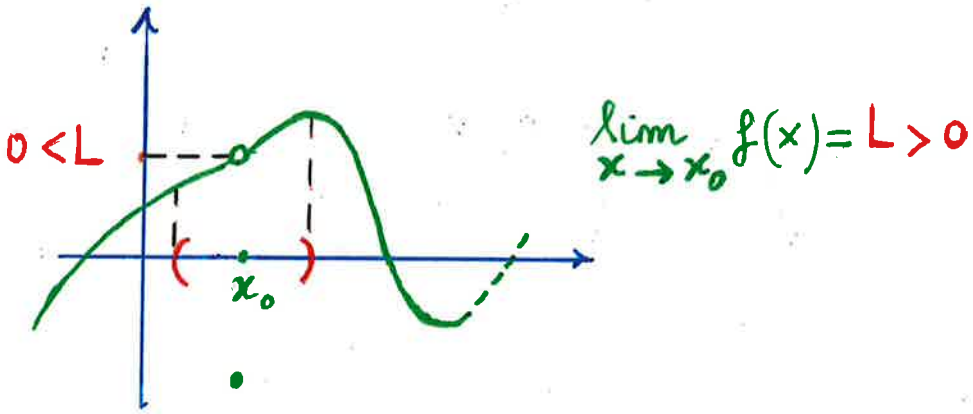
Teorema. (LIMITATEZZA LOCALE) *Se la funzione f ha limite finito in x_0 (oppure se è continua in x_0) allora esiste un intorno J di x_0 tale che f è limitata in $J \cap \operatorname{dom} f$.* $\left(|f(x)| \leq M, \ \forall x \in J \cap \operatorname{dom} f \right)$

Dim. basta ripercorrere la dim. del teorema di limitatezza per successioni convergenti. □

Teorema. (PERMANENZA DEL SEGNO) *Se f ha limite $L > 0$ per $x \to x_0$ allora esiste un intorno J di x_0 tale che $f > 0$ in $J \cap \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$. Se invece f è continua in x_0 e $f(x_0) = L > 0$, allora esiste un intorno J di x_0 tale che $f > 0$ in $J \cap \operatorname{dom} f$.*

Dim. basta ripercorrere la dim. del corrispondente teorema per le successioni. □

ESERCIZIO: enunciare il teorema di permanenza del segno nel caso $L < 0$.



Teorema (CONFRONTO).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L' .$$

Supponiamo inoltre che esista un intorno J di x_0 tale che

$$f(x) \leq g(x) , \qquad \forall\, x \in J \cap A \setminus \{x_0\} .$$

Allora $L \leq L'$.

Teorema (DEI DUE CARABINIERI).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L\,.$$

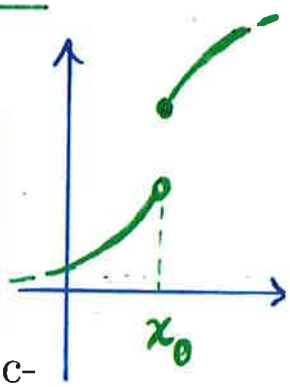
Sia $h : A \to \mathbb{R}$ una terza funzione, per cui esiste un intorno J di x_0 tale che:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)\,, \qquad \forall\, x \in J \cap A \setminus \{x_0\}\,.$$

Allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Teorema. (LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE) *Se f è non decrescente, allora f ha limiti sinistro e destro finito per $x \to x_0$ e si ha*

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x \to x_0-} f(x) &= \sup\{f(x) : \ x \in \operatorname{dom} f, \ x < x_0\} \\ \lim_{x \to x_0+} f(x) &= \inf\{f(x) : \ x \in \operatorname{dom} f, \ x > x_0\}. \end{aligned}}$$



Dim. uguale alla dimostrazione del teorema sulle successioni monotone. □

ESERCIZIO: enunciare il teorema analogo per funzioni non crescenti.

f non crescente $\Longrightarrow$ $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \operatorname{dom} f, x < x_0\}$
$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \operatorname{dom} f, x > x_0\}$

LIMITI E COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Teorema. *Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$ intervalli. Siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è continua in x_0, cioè*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)).}$$

(x_0 di accumulazione per A)

Dim. Poniamo $y_0 = f(x_0)$ e $L = g(y_0)$. Sia I_L un intorno arbitrario di L.

Per la continuità di g in y_0, esiste un intorno I_{y_0} di y_0 tale che per ogni $y \in I_{y_0} \cap B$ si ha $g(y) \in I_L$.

D'altra parte, per la continuità di f in x_0, esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che per ogni $x \in I_{x_0} \cap A$ si ha $f(x) \in I_{y_0}$ (e anche $f(x) \in I_{y_0} \cap B$ perchè , ovviamente, $f(x) \in B$).
Quindi, per ogni $x \in I_{x_0} \cap A$ si ha $g(f(x)) \in I_L$. $\square$

Più in generale, vale

Teorema. *Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$ intervalli. Siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$ e $x_0, y_0, L \in [-\infty, +\infty]$ tali che si abbia*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \qquad \lim_{y \to y_0} g(y) = L.}$$

Se è verificata una delle condizioni seguenti

i) $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ *si ha* $f(x) \neq y_0$;

ii) $y_0 \in B$ *e* g *è continua in* y_0,

allora

Se $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \longrightarrow y_0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L.}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

ESEMPIO: il teorema precedente si applica (con l'ipotesi *i)* a limiti del tipo (qui $x_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} = 0, \qquad \text{in quanto}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \to -\infty} e^y = 0.$$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE $y = f(x)$

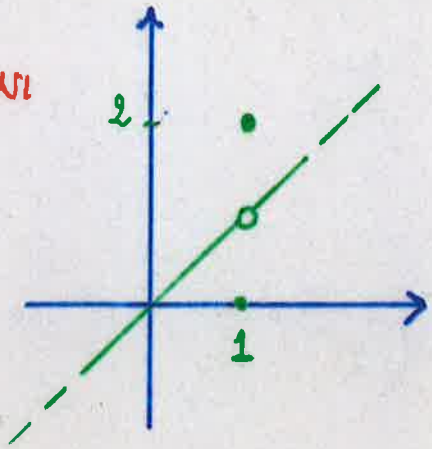
Per $x \to +\infty$, $\frac{1-x^2}{x} \longrightarrow -\infty$; è verificata la condizione i)

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0 = \inf\{e^y : y \in \mathbb{R}\}$$

LIMITE DI UNA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

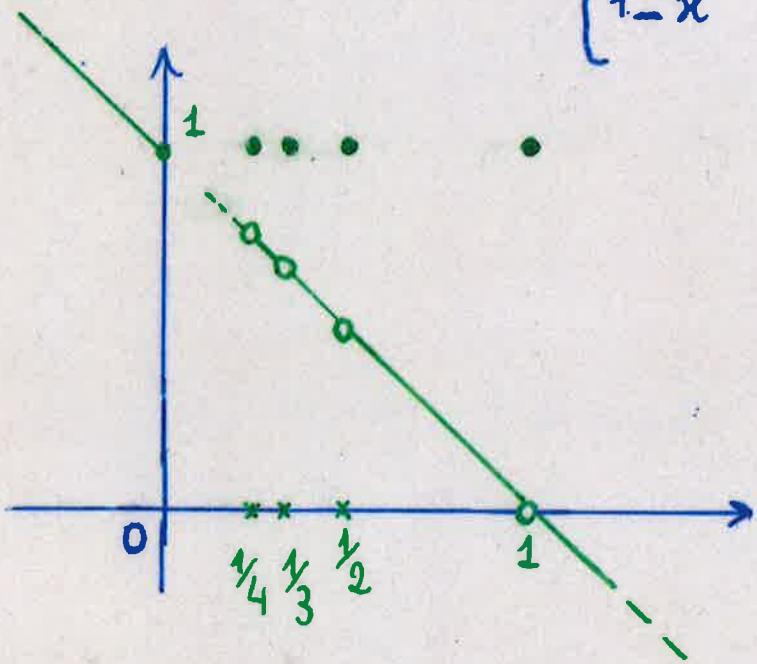
ATTENZIONE!!

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g(y) = \begin{cases} y, & y \neq 1 \\ 2, & y = 1 \end{cases}$



$$\boxed{\lim_{y \to 1} g(y) = 1}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \\ 1 - x & \text{altrimenti} \end{cases}$



$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}$$

$x \to 0$, $f(x) \to 1$

$\Rightarrow \underline{g(f(x)) \longrightarrow 1}$ NO!

Ma $\boxed{\lim_{x \to 0} g(f(x)) \ \underline{\text{non vale } 1} \ (\underline{\text{di fatto non esiste}})}$

Per $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$ $\qquad g(f(x_n)) = g(f(1/n)) = g(1) = 2$

MANCA L'IPOTESI: $f(x) \neq 1$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$

Caratterizzazione di limite mediante successioni

Teorema. *Si ha* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall$ *successione* $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$ *con* $x_n \to x_0$ *si ha*

$$\lim_n f(x_n) = L.$$

f è continua in x_0 $\iff \forall$ *successione* $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ *con* $x_n \to x_0$ *si ha*

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0).$$

ESEMPIO 1: usiamo il teorema precedente per dimostrare che $f(x) = \sin(1/x)$ non ammette limite per $x \to 0$. Basta trovare due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinitesime e tali che $\lim_n f(a_n) \neq \lim_n f(b_n)$.

Scegliamo, ad esempio, $a_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ e $b_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$.

$\left(\lim_n f(a_n) = 1\,, \lim_n f(b_n) = -1\right)$.

ESEMPIO 2: Si può provare che una funzione f non è continua in x_0 trovando una successione $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ con $x_n \to x_0$ e tale che $\lim_n f(x_n) \neq f(x_0)$.

Sia, ad esempio, f definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$

(evidentemente, f non è continua in 0).

Scegliendo $x_n = \dfrac{1}{n}$, si trova $\lim_n f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 \neq f(0)$.

$a_n \longrightarrow L \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$ continua in $x_0 = L$ $\Longrightarrow e^{a_n} \longrightarrow e^L$

$a_n \longrightarrow +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\Longrightarrow e^{a_n} \longrightarrow +\infty$

$a_n \longrightarrow -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\Longrightarrow e^{a_n} \longrightarrow 0$

INFINITESIMI e INFINITI

Def. Si dice che f è un *infinitesimo* (o che f è *infinitesima*) per $x \to x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.}$$

Si dice che f è un *infinito* per $x \to x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.}$$

Si estendono anche in questo caso le definizioni date per le successioni relative al confronto fra infiniti e infinitesimi.

Notazione: f infinitesimo si scrive $f(x) = o(1)$ per per $x \to x_0$.

Es.

Per $\alpha > 0$ e $a > 1$: $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$

x^α è un infinito di ordine superiore a $\log_a x$, per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

a^x è un infinito di ordine superiore ad x^α per $x \to +\infty$.