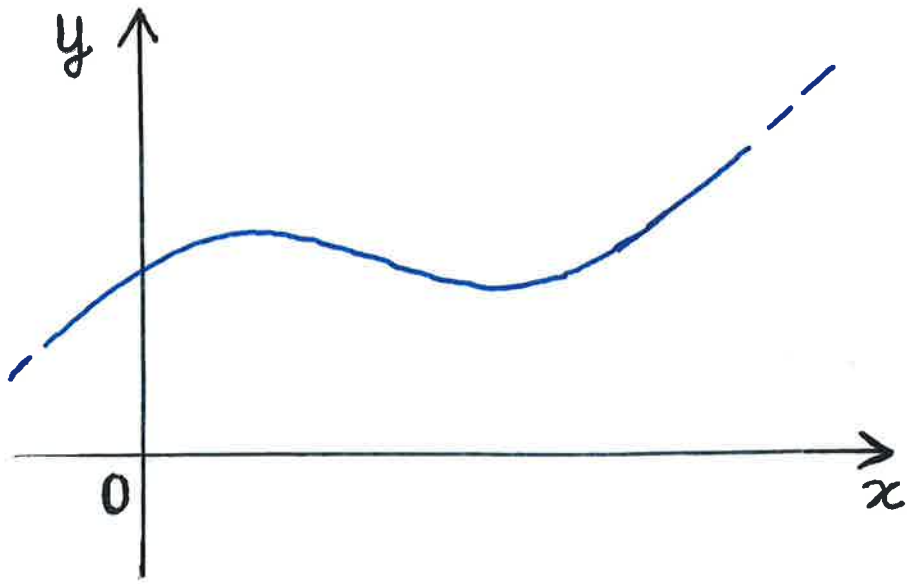
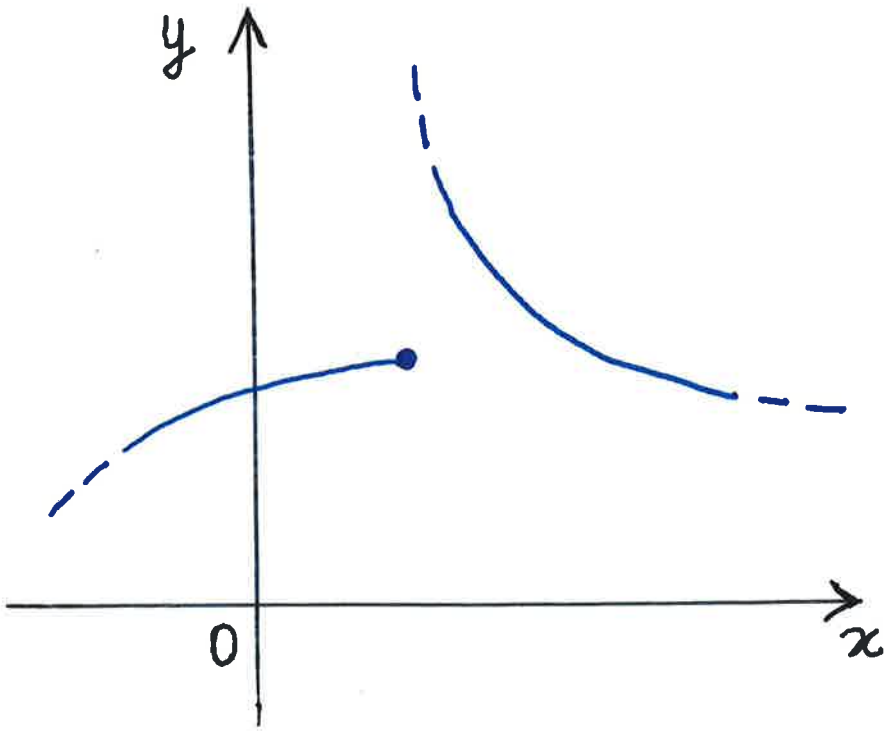
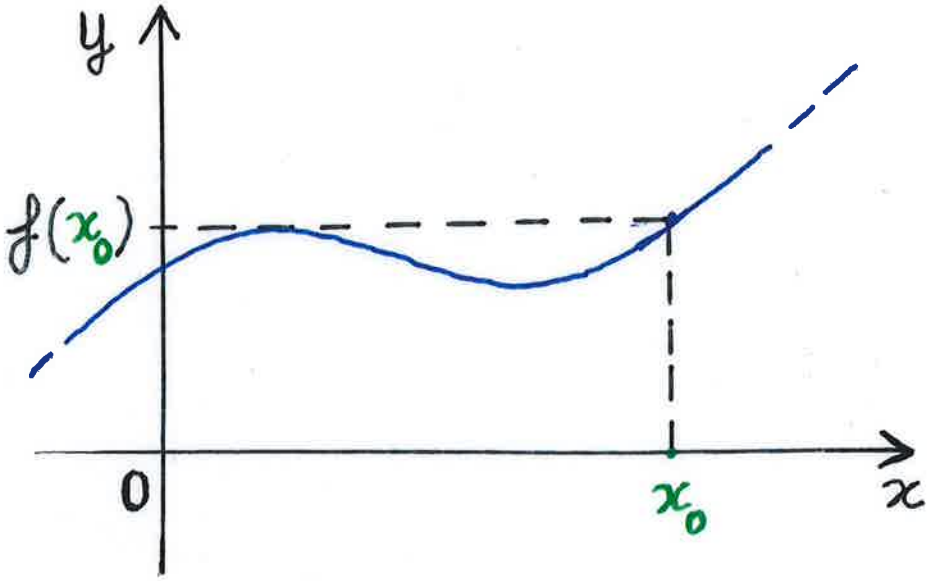
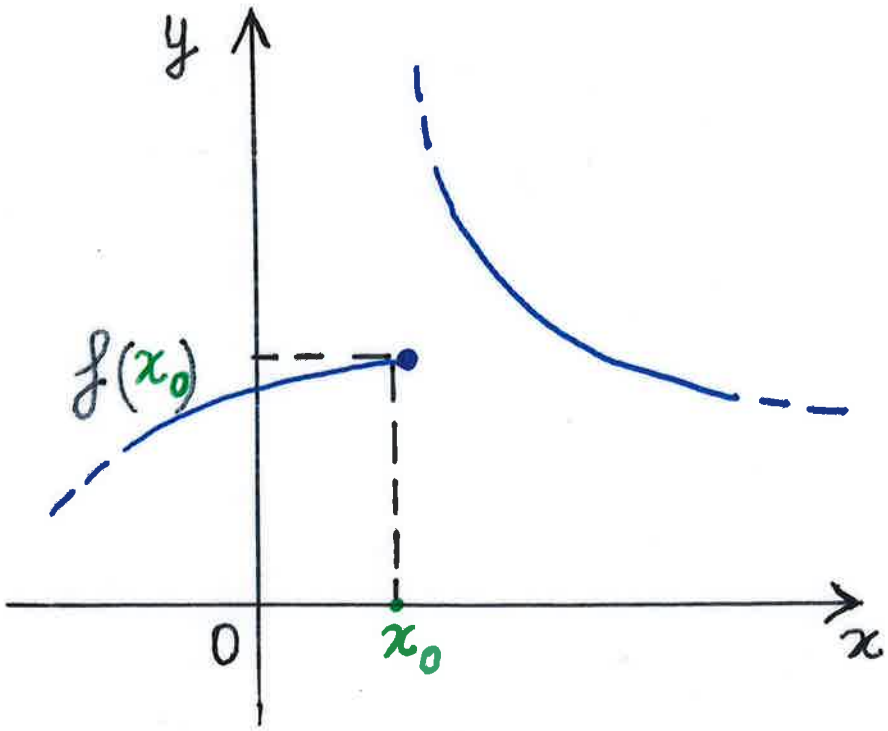
CONTINUITÀ / DISCONTINUITÀ



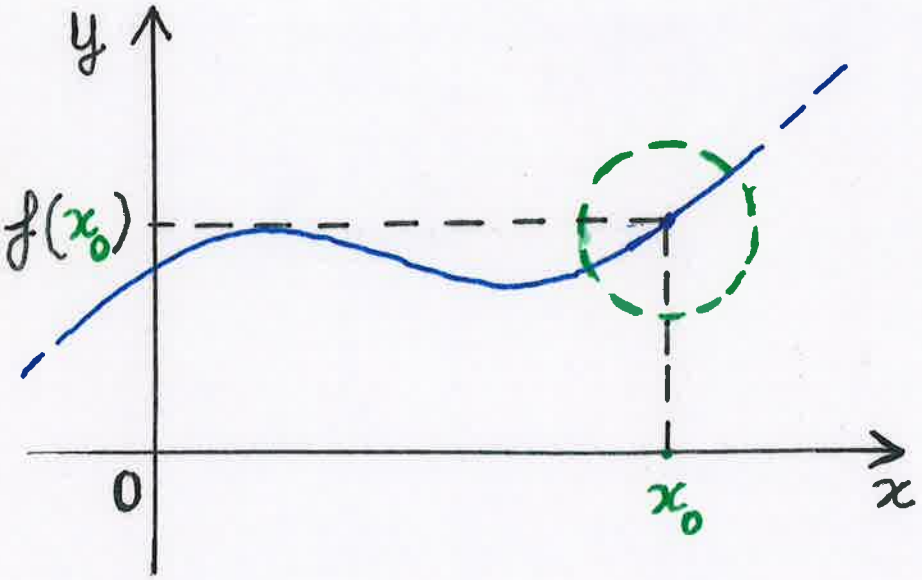


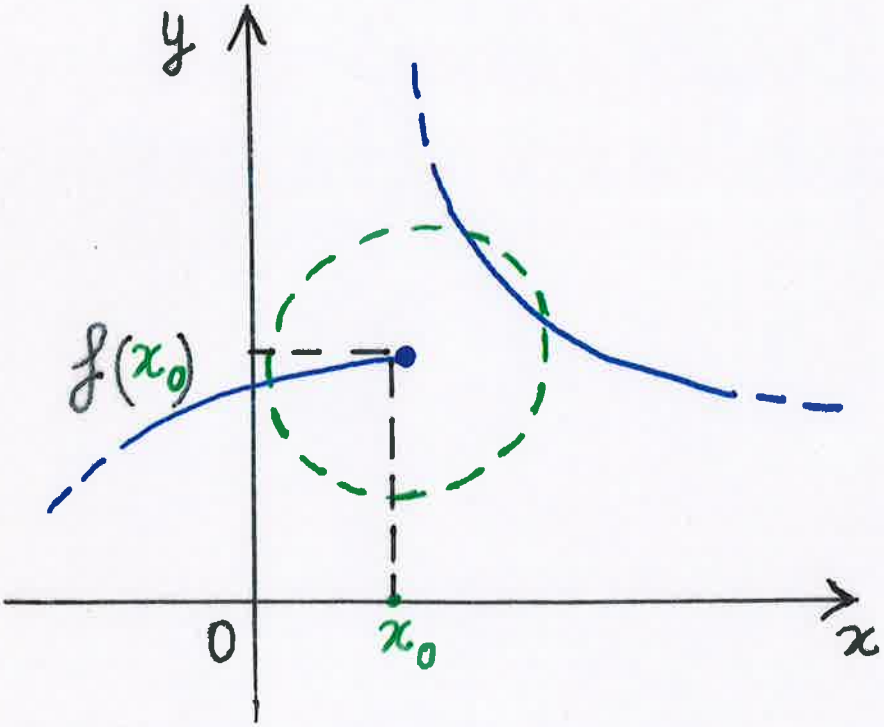
CONTINUITÀ / DISCONTINUITÀ





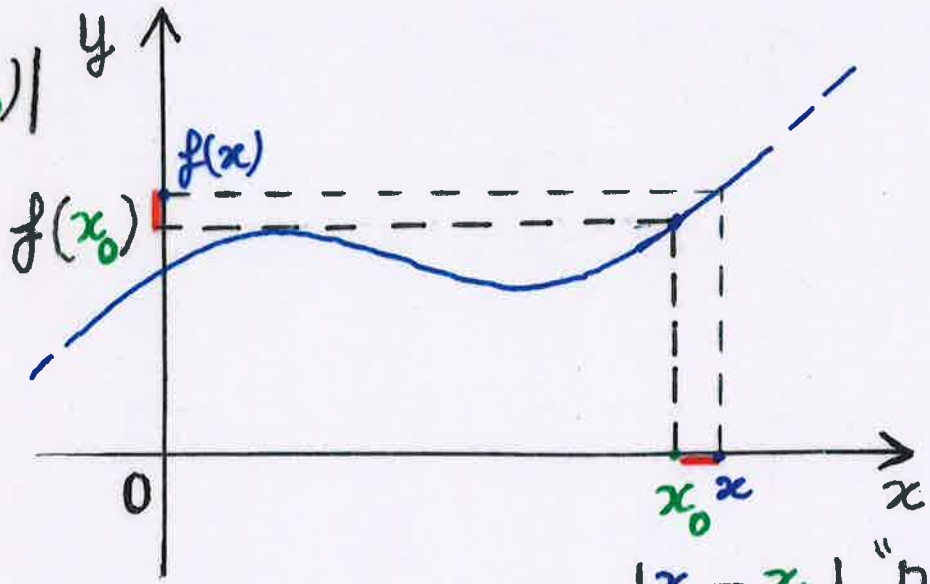
CONTINUITÀ / DISCONTINUITÀ





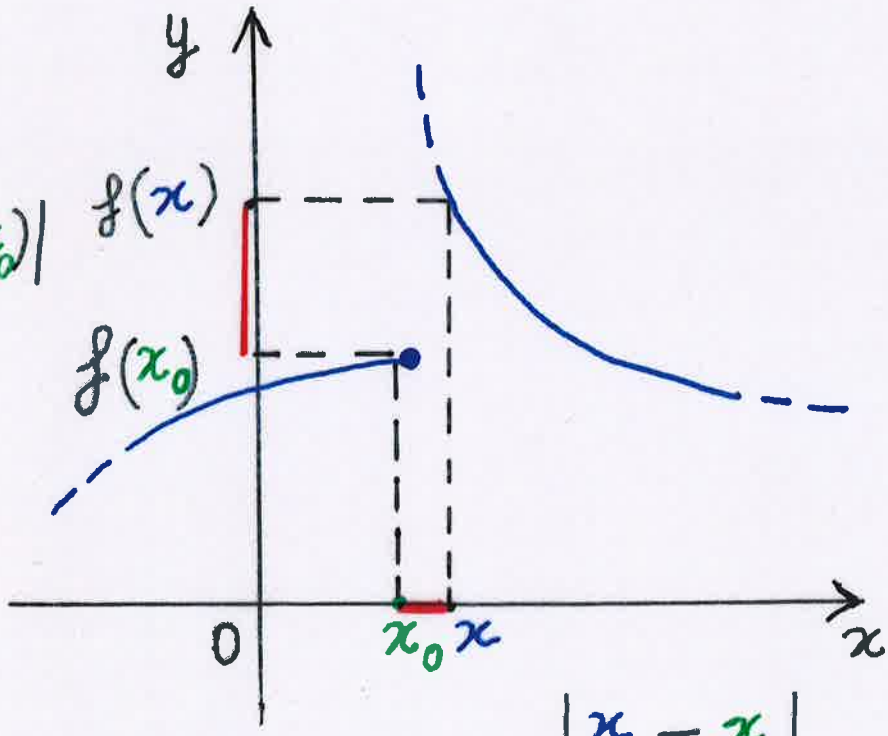
CONTINUITÀ / DISCONTINUITÀ

$|f(x) - f(x_0)|$ "piccolo"



$|x - x_0|$ "piccolo"

$|f(x) - f(x_0)|$ "GRANDE"



$|x - x_0|$ "piccolo"

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap dom f$ e $\boxed{x \neq x_0}$ allora $|f(x) - L| \leq \varepsilon$

$(x_0 \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R})$

Continuità in un punto

Def. Una funzione f è *continua* in $x_0 \in dom f$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap dom f$ allora $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

NOTA: 1) se x_0 è un punto di accumulazione per $dom f$ allora f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) se x_0 è un punto isolato di $dom f$, allora f è continua in x_0. Infatti $\exists\ \delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap dom f = \{x_0\}$; quindi tale δ verifica la def. di continuità per ogni $\varepsilon > 0$. $\left(x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap dom f \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \right)$

Def. Analogamente si definisce la *continuità a destra* (risp. sinistra) in $x_0 \in dom f$ di f (prendendo intorni destri (risp. sinistri) di x_0): $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in [x_0, x_0 + \delta[\cap dom f$ $\left(x \in]x_0 - \delta, x_0] \cap dom f \right) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

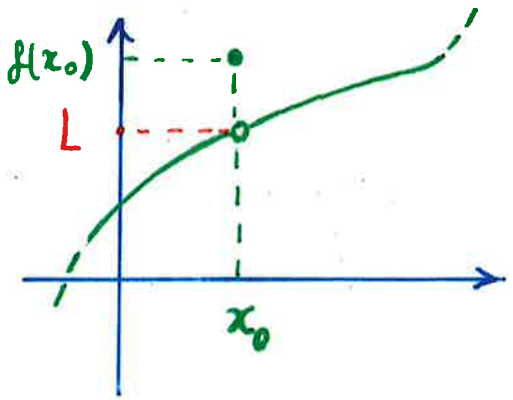
Classificazione dei punti di discontinuità

$x_0 \in dom f$, di accumulazione per $dom f$.

* 1) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbf{R}$ con $L \neq f(x_0)$, allora si dice che in x_0 f presenta una *discontinuità eliminabile*. Ciò perché la funzione definita da

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in dom f,\ x \neq x_0 \\ L & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0;

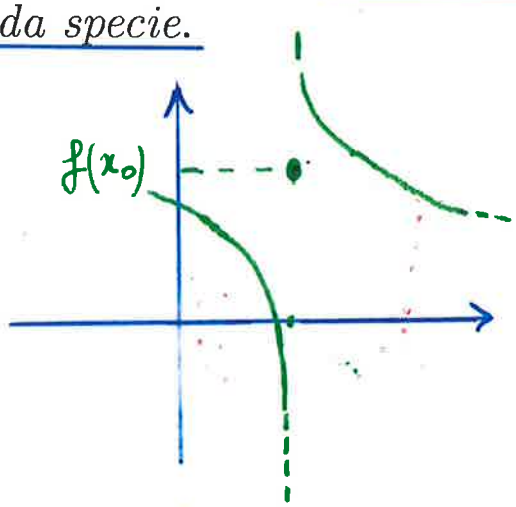


* 2) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, oppure se esistono i limiti destro e sinistro e uno di questi è infinito, allora si dice che x_0 è *punto di infinito*;

* 3) se i limiti destro e sinistro esistono in $\mathbf{R}$ ma sono differenti si dice che x_0 è *punto di salto*;

* 4) se uno dei due limiti destro o sinistro non esiste, allora si dice che x_0 presenta una *discontinuità di seconda specie.*

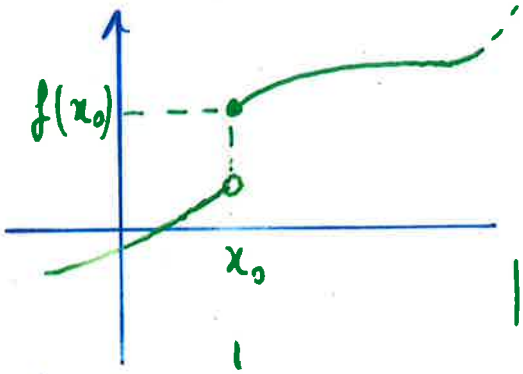
2)



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

3)

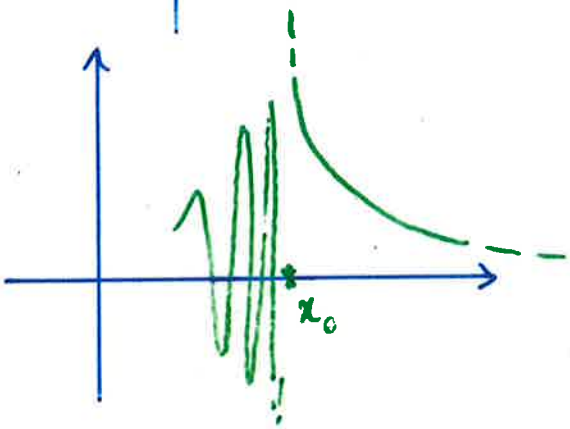


$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 (= f(x_0))$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 \neq L_1$

$|L_1 - L_2|$ = salto di f in x_0

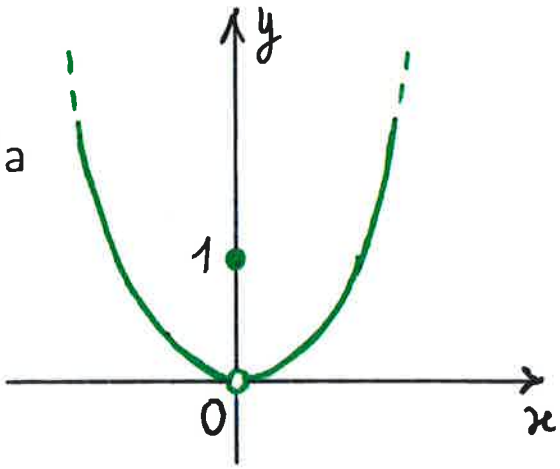
4)



$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

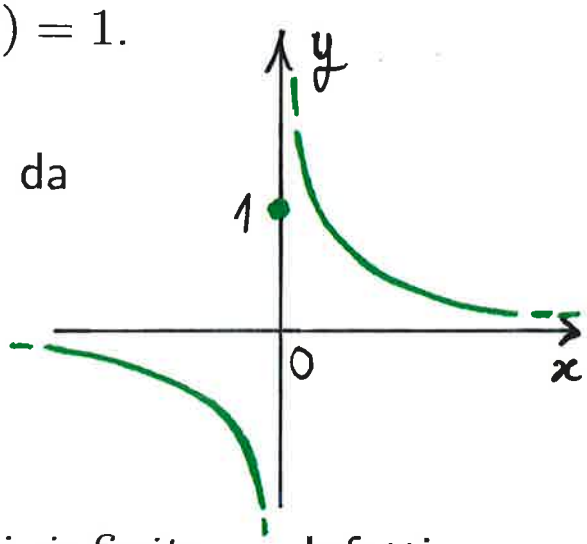
Classificazione dei punti di discontinuità. Esempi



1) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

presenta in $x_0 = 0$ una *discontinuità eliminabile* (o x_0 è un *punto di discontinuità eliminabile* per f). Infatti $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$.

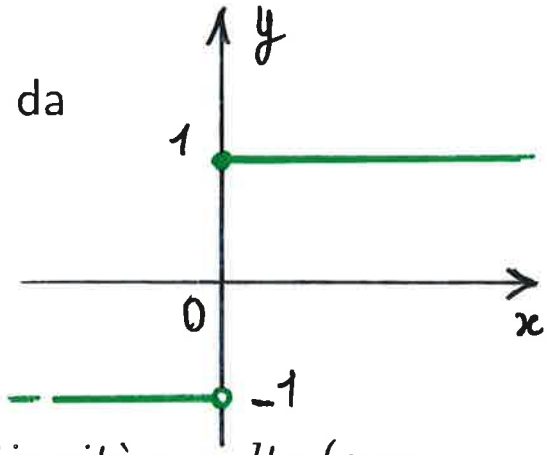


2) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha in $x_0 = 0$ un *punto di infinito*. Infatti $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

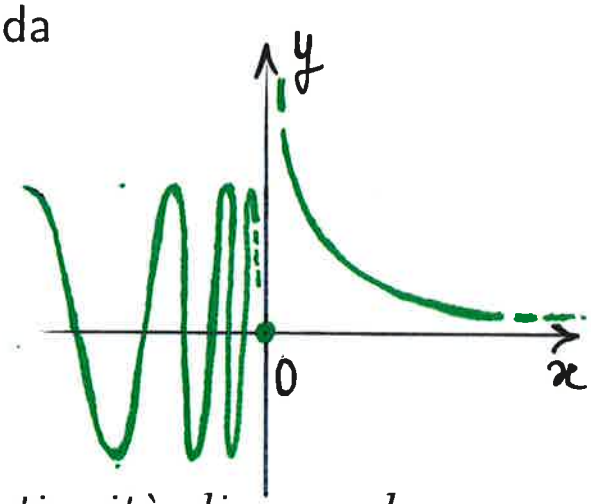
3) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da



$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -1\,, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

presenta in $x_0 = 0$ una *discontinuità a salto* (o x_0 è un *punto di discontinuità a salto* per f) . Infatti $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm 1$.

4) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da



$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}\,, & \text{se } x < 0 \\ 0\,, & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\,, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

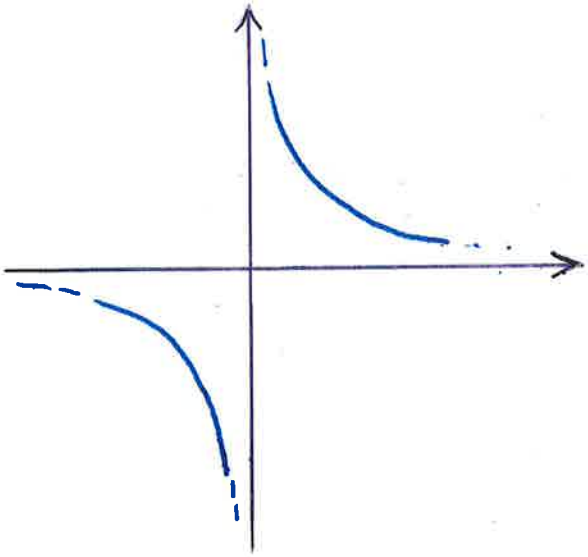
presenta in $x_0 = 0$ una *discontinuità di seconda specie* (o x_0 è un *punto di discontinuità di seconda specie* per f). Infatti non esiste il $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (mentre si ha $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$).

NOTA: Un punto di discontinuità di f è <u>sempre</u> un punto appartenente a dom$f$.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$



0 <u>non</u> è un punto di discontinuità di f

$0 \notin$ dom$f$

0 è una <u>singolarità</u> di f

La retta $x = 0$ è un <u>asintoto verticale</u> di f

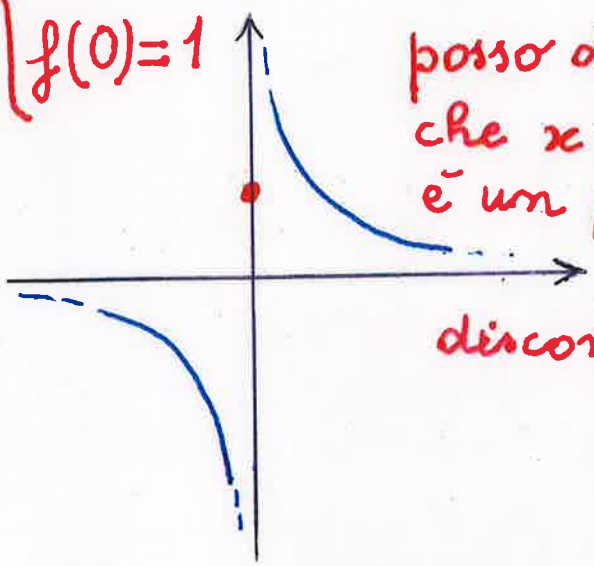
NOTA: Un punto di discontinuità di f è <u>sempre</u> un punto appartenente a dom$f$.

$f : \cancel{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} , \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$\mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$



posso dire che $x=0$ è un p.to di discont.

0 <u>non</u> è un punto di discontinuità di f

$0 \notin$ dom$f$

0 è una <u>singolarità</u> di f

La retta $x=0$ è un <u>asintoto verticale</u> di f