L'uguaglianza in $\mathbf{R}$ è un esempio di relazione di equivalenza. Infatti

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad x = x$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \qquad x = y \Longrightarrow y = x$$

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R} \qquad (x = y \ e \ y = z) \Longrightarrow x = z.$$

FUNZIONI

Altro concetto basilare: una *funzione* f da A in B è una relazione da A in B che verifica

$$\forall a \in A \ \exists! b \in B \ : \ afb.$$

Perciò f è una legge che ad ogni $a \in A$ fa corrispondere *uno e un solo* $b \in B$. L'insieme A viene chiamato il *dominio* di f e si denota con *dom* f, l'insieme B viene chiamato *codominio*.

Questa definizione formalizza un concetto già noto con altre definizioni. In particolare si accettano molte altre notazioni come $f : A \to B$, $b = f(a)$ oppure $a \mapsto b = f(a)$.

ATTENZIONE: Con questa definizione $f : A \to B$ e $g : C \to D$ sono uguali $\Longleftrightarrow$ $A = C$ (i domini coincidono) e $f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$ (mentre c'è più libertà per B e D)

FUNZIONI

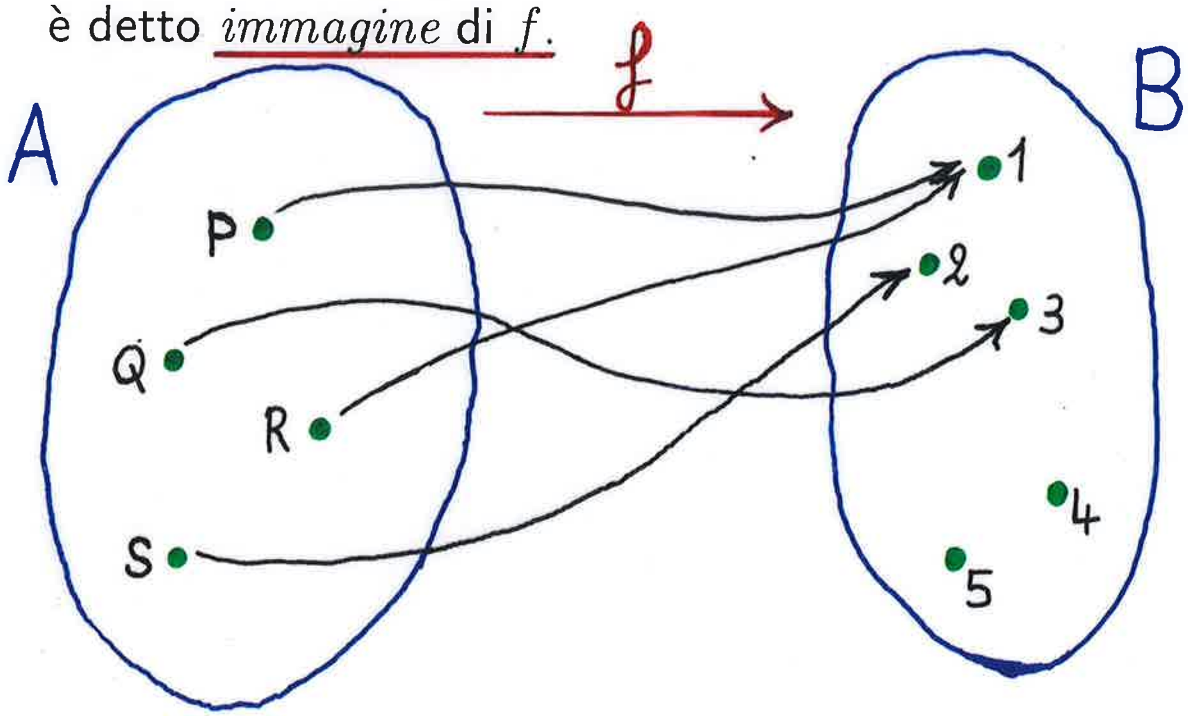
Data una funzione $f : A \to B$, l'insieme

$$\boxed{G = \{(a,b) \in A \times B :\ b = f(a)\} \subseteq A \times B}$$

è detto *grafico* di f.

$$\boxed{im\, f = \{b \in B :\ \exists\, a \in A :\ b = f(a)\} \subseteq B\,.}$$

è detto *immagine* di f.



- $\forall\, a \in A$, $f(a) = b$ si dice *immagine* di a mediante f
- Dato $b \in im f$, ogni elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ è detto *controimmagine* di b mediante f.

FUNZIONI

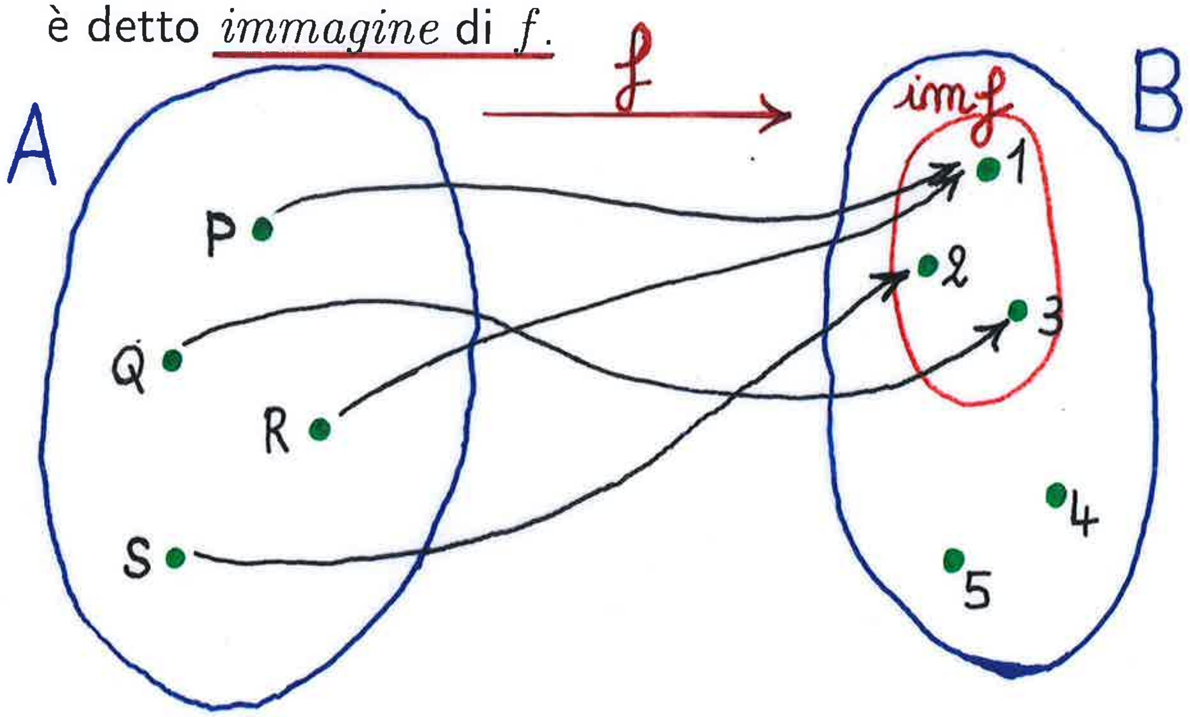
Data una funzione $f : A \to B$, l'insieme

$$\boxed{G = \{(a,b) \in A \times B : \ b = f(a)\} \subseteq A \times B}$$

è detto *grafico* di f.

$$\boxed{im\,f = \{b \in B : \ \exists\, a \in A : \ b = f(a)\} \subseteq B\,.}$$

è detto *immagine* di f.

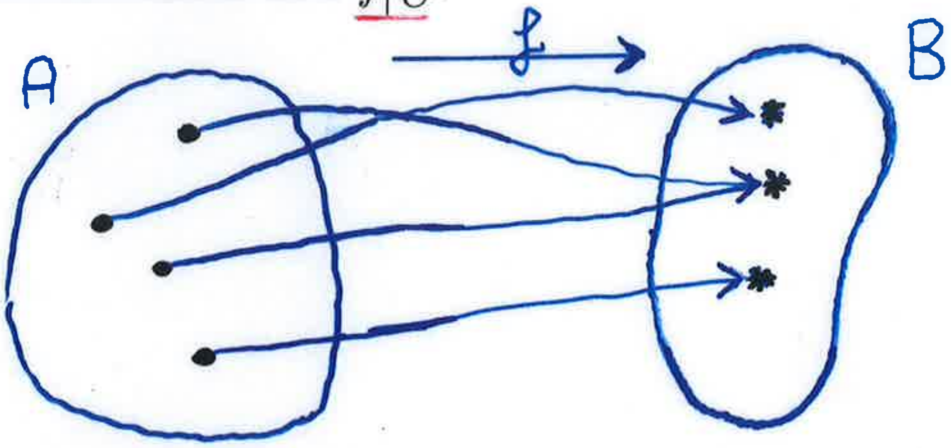


- $\forall\, a \in A$, $f(a) = b$ si dice *immagine* di a mediante f
- Dato $b \in im\,f$, ogni elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ è detto *controimmagine* di b mediante f.

Def. Data una funzione $f : A \to B$ e $C \subset A$, si chiama *restrizione* di f su C la funzione

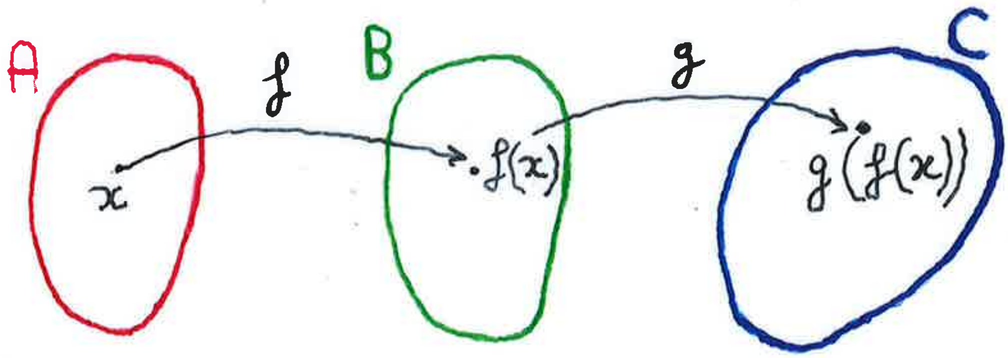
$$\begin{aligned} h : C &\to B \\ x &\mapsto h(x) = f(x)\,. \end{aligned}$$

La funzione h definita come sopra si indica abitualmente con $f_{|C}$.



Def. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si chiama *composizione* di f e di g, e si indica con $g \circ f$, la funzione

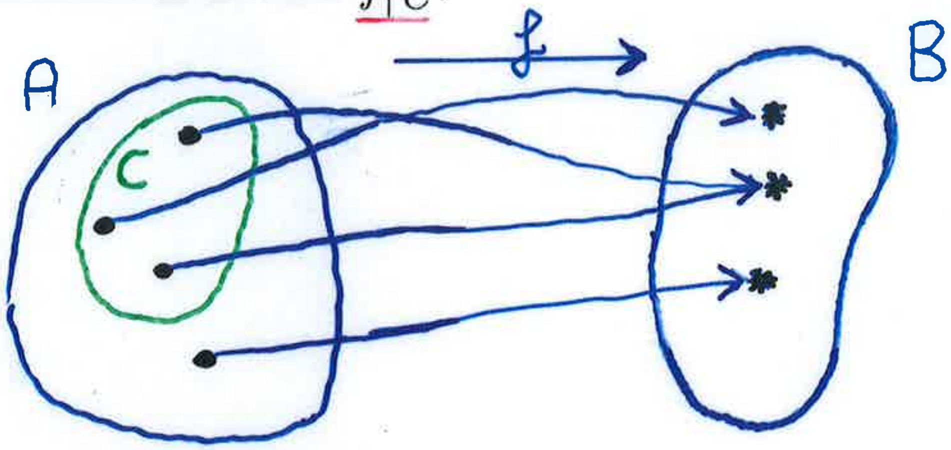
$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x))\,. \end{aligned}$$



Def. Data una funzione $f : A \to B$ e $C \subset A$, si chiama *restrizione* di f su C la funzione

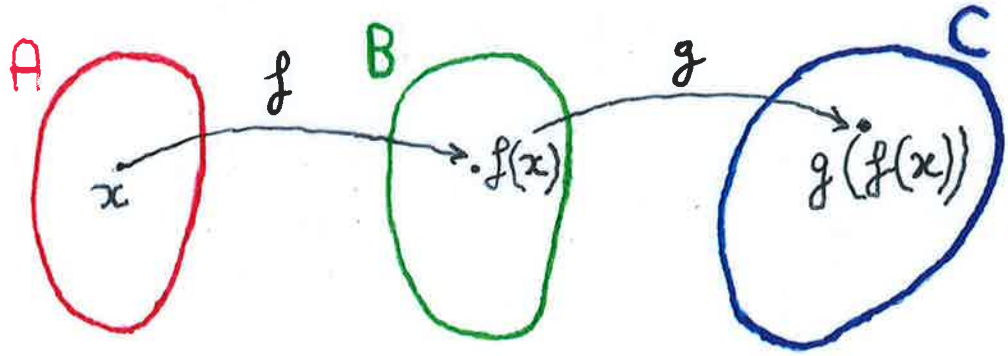
$$\begin{aligned} h : C &\to B \\ x &\mapsto h(x) = f(x)\,. \end{aligned}$$

La funzione h definita come sopra si indica abitualmente con $f_{|C}$.



Def. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si chiama *composizione* di f e di g, e si indica con $g \circ f$, la funzione

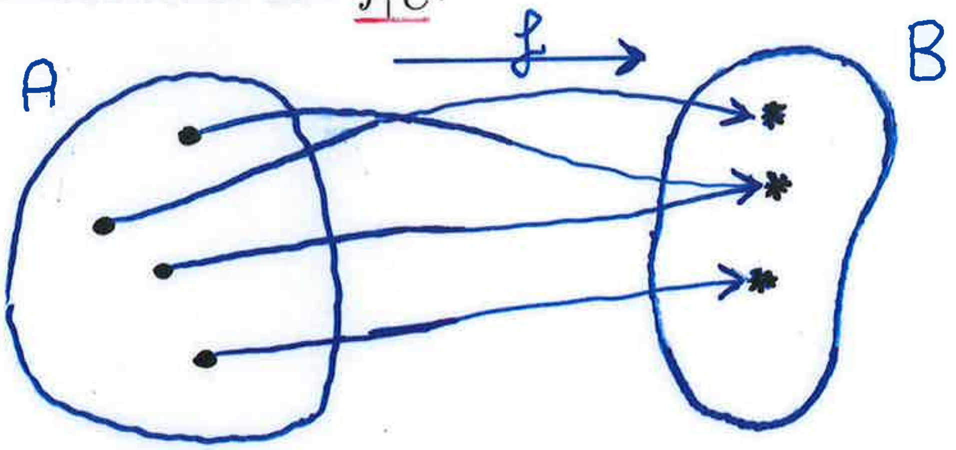
$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x))\,. \end{aligned}$$



Def. Data una funzione $f : A \to B$ e $C \subset A$, si chiama *restrizione* di f su C la funzione

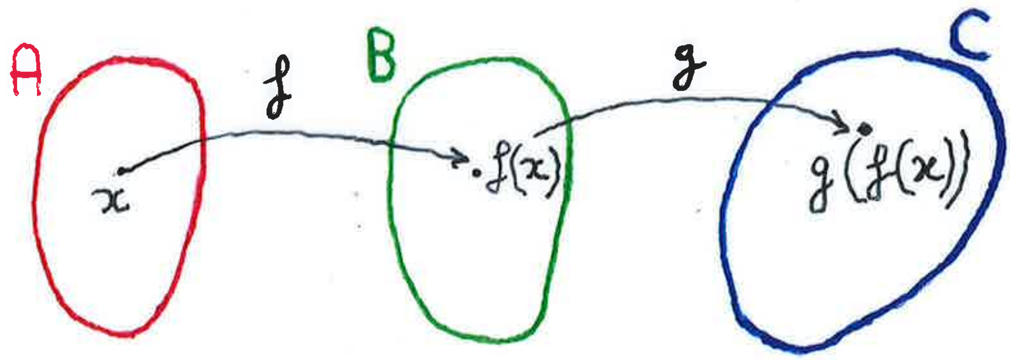
$$\begin{aligned} h : C &\to B \\ x &\mapsto h(x) = f(x)\,. \end{aligned}$$

La funzione h definita come sopra si indica abitualmente con $f_{|C}$.



Def. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si chiama *composizione* di f e di g, e si indica con $g \circ f$, la funzione

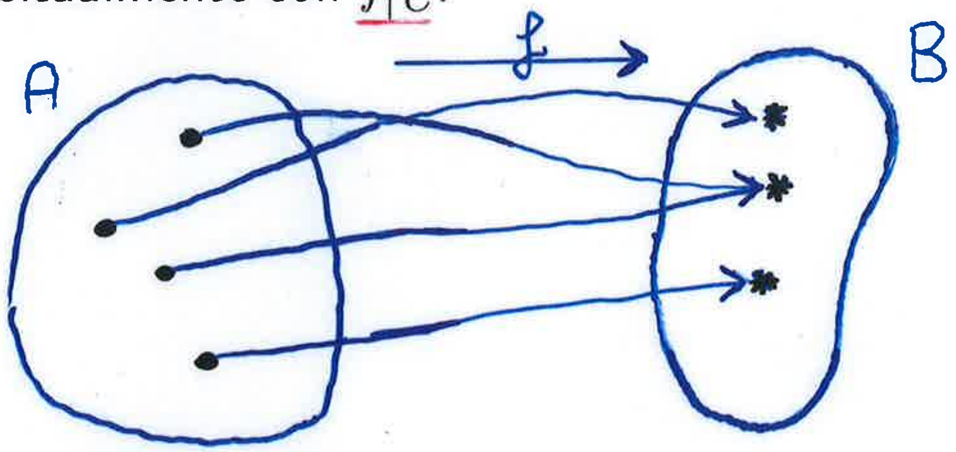
$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x))\,. \end{aligned}$$



Def. Data una funzione $f : A \to B$ e $C \subset A$, si chiama *restrizione* di f su C la funzione

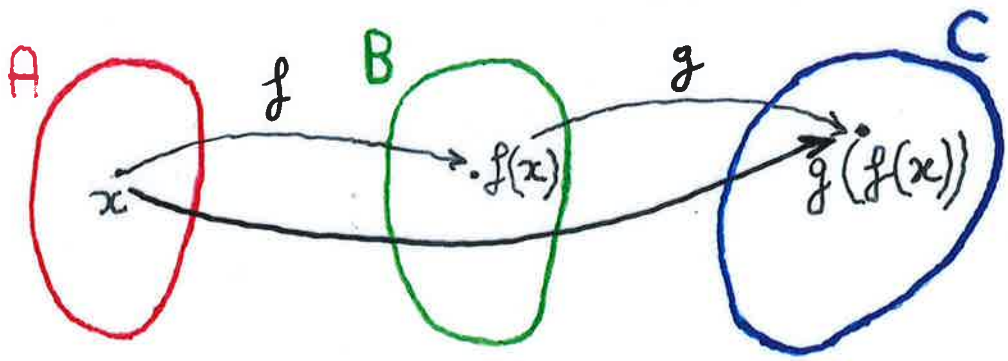
$$\begin{aligned} h : C &\to B \\ x &\mapsto h(x) = f(x)\,. \end{aligned}$$

La funzione h definita come sopra si indica abitualmente con $f_{|C}$.



Def. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si chiama *composizione* di f e di g, e si indica con $g \circ f$, la funzione

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x))\,. \end{aligned}$$



Esempio di composizione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \sin x$$

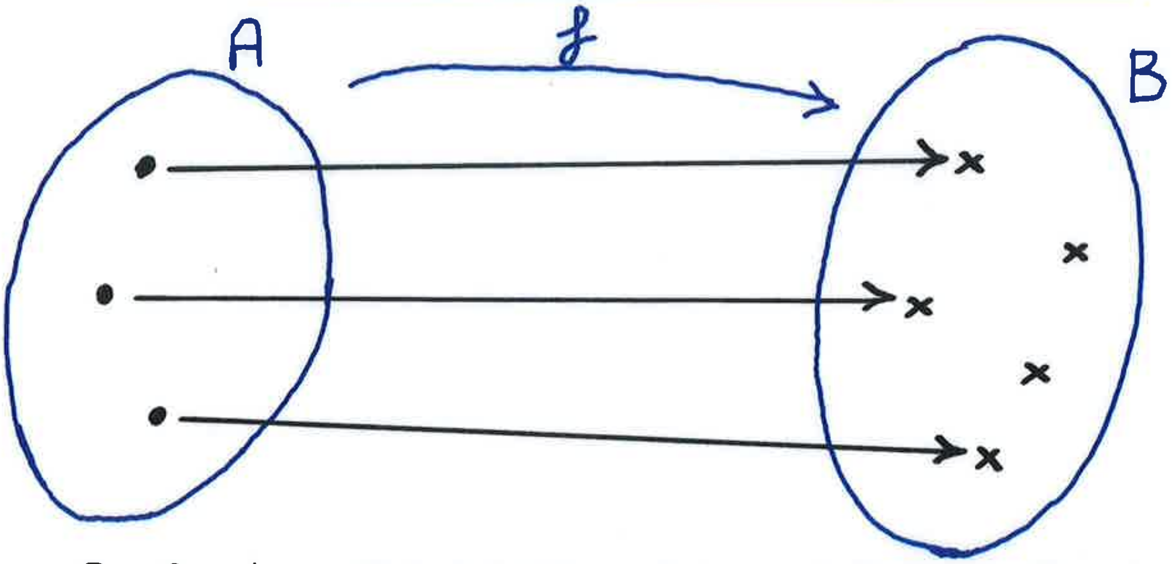
$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$$

Funzioni iniettive e funzione inversa

Def. Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* (o *invertibile*) se

$$\boxed{\forall\, x, y \in A : \; x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \neq f(y)\,.}$$



Se $f : A \to B$ è iniettiva, è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} g : im\, f \subseteq B &\to A \\ y &\mapsto g(y) = x \in A \; : \;\; f(x) = y\,. \end{aligned}$$

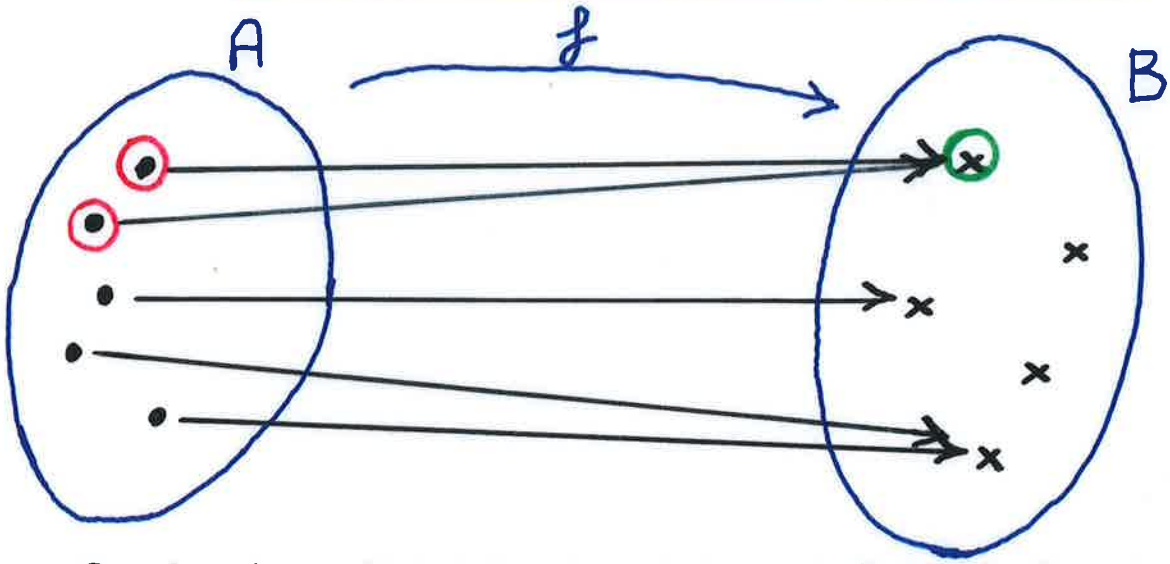
g prende il nome di *funzione inversa* di f e si denota con f^{-1}; per definizione, vale la relazione

$$f^{-1}(f(x)) = x\,, \quad \forall\, x \in A\,.$$

Funzioni iniettive e funzione inversa

Def. Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* (o *invertibile*) se

$$\boxed{\forall\, x, y \in A: \; x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \neq f(y)\,.}$$



Se $f : A \to B$ è iniettiva, è ben definita la funzione

$$\boxed{\begin{aligned} g : im\, f \subseteq B \to A& \\ y \mapsto g(y) = x \in A :& \;\; f(x) = y\,. \end{aligned}}$$

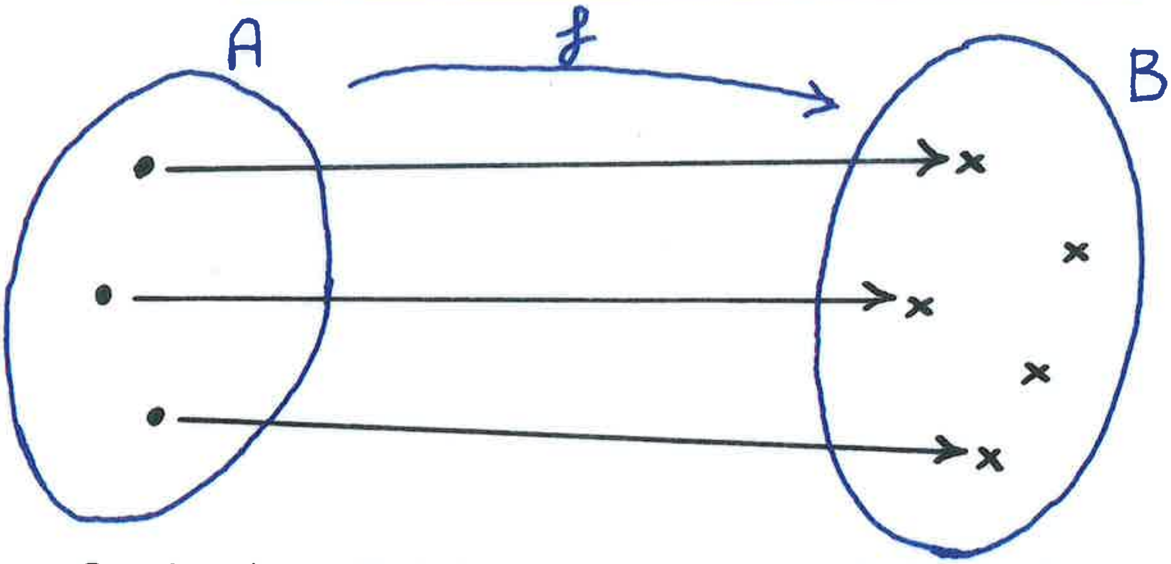
g prende il nome di *funzione inversa* di f e si denota con f^{-1}; per definizione, vale la relazione

$$f^{-1}(f(x)) = x\,, \quad \forall\, x \in A\,.$$

Funzioni iniettive e funzione inversa

Def. Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* (o *invertibile*) se

$$\forall\, x, y \in A: \; x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \neq f(y)\,.$$



Se $f : A \to B$ è iniettiva, è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} g : im\, f \subseteq B &\to A \\ y &\mapsto g(y) = x \in A : \;\; f(x) = y\,. \end{aligned}$$

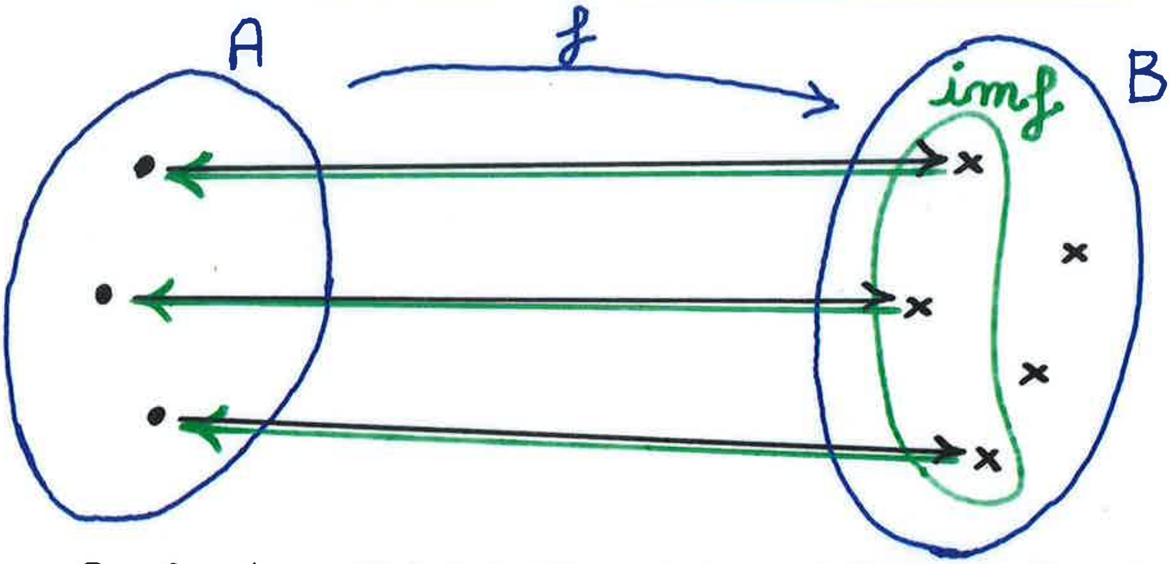
g prende il nome di *funzione inversa* di f e si denota con f^{-1}; per definizione, vale la relazione

$$f^{-1}(f(x)) = x\,, \quad \forall\, x \in A\,.$$

Funzioni iniettive e funzione inversa

Def. Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* (o *invertibile*) se

$$\boxed{\forall x, y \in A : \; x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \neq f(y) \, .}$$



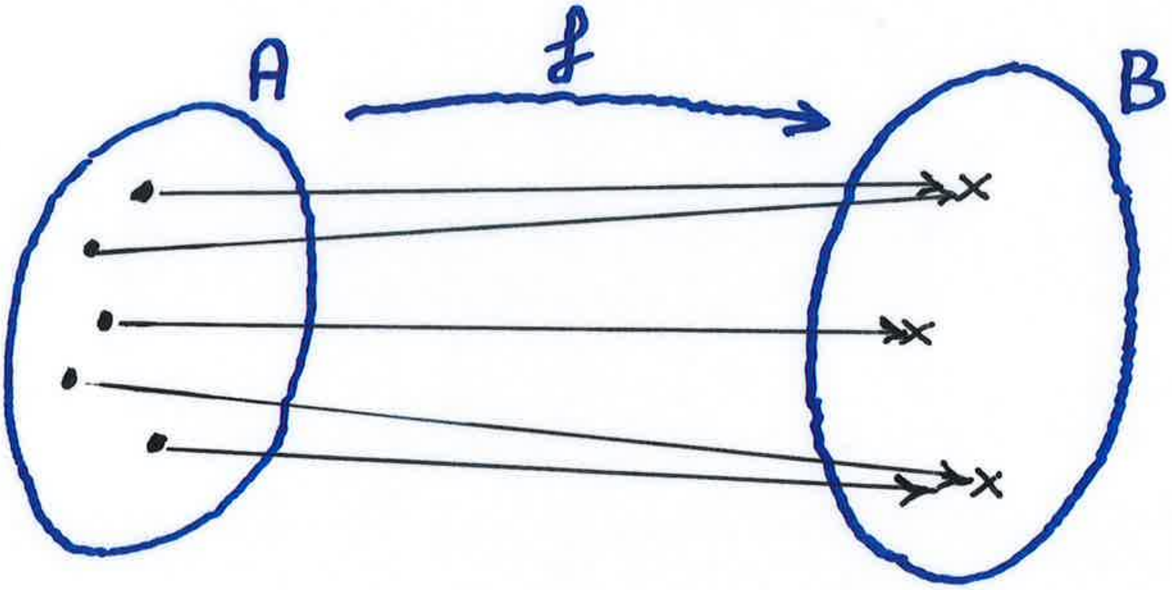
Se $f : A \to B$ è iniettiva, è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} g : im\, f \subseteq B &\to A \\ y &\mapsto g(y) = x \in A \; : \; f(x) = y \, . \end{aligned}$$

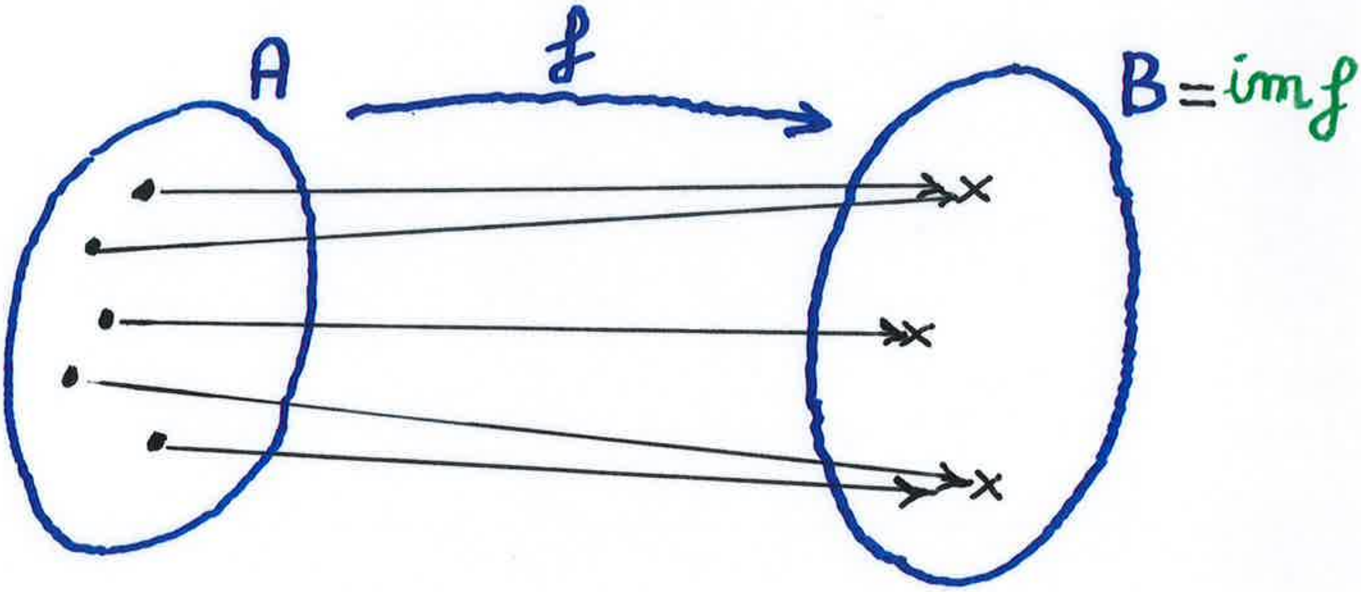
g prende il nome di *funzione inversa* di f e si denota con f^{-1}; per definizione, vale la relazione

$$f^{-1}(f(x)) = x \, , \quad \forall x \in A \, .$$

Def. Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva su B** se $\operatorname{im} f = B$ (ovvero se $\forall b \in B \ \exists a \in A : b = f(a)$).

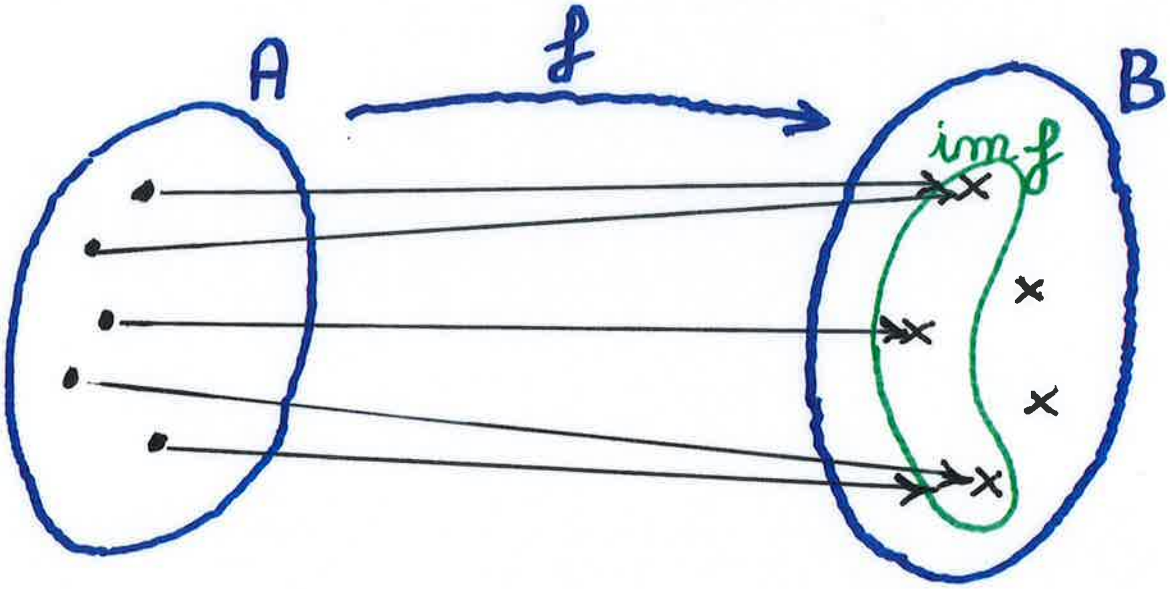


Def. Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice suriettiva su B se $\operatorname{im} f = B$ (ovvero se $\forall b \in B \ \exists a \in A : b = f(a)$).



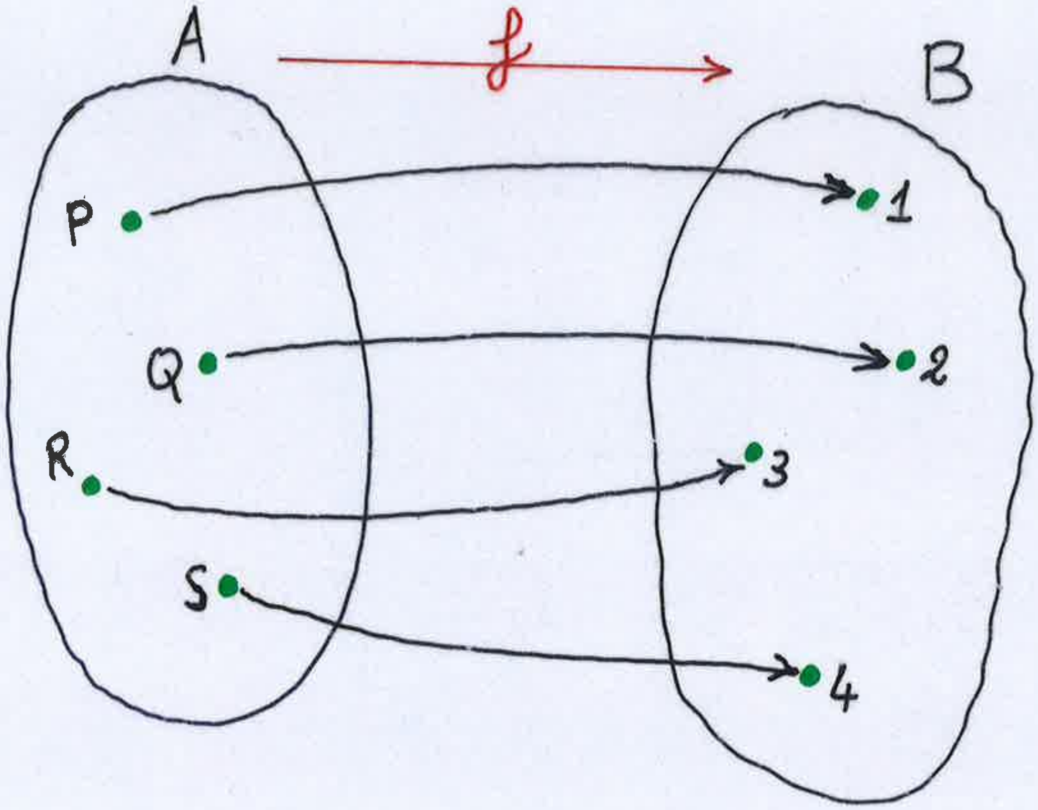
È SURIETTIVA SU B

Def. Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice surriettiva su B se $\operatorname{im} f = B$ (ovvero se $\forall b \in B \ \exists a \in A : b = f(a)$).



NON È SURIETTIVA SU B

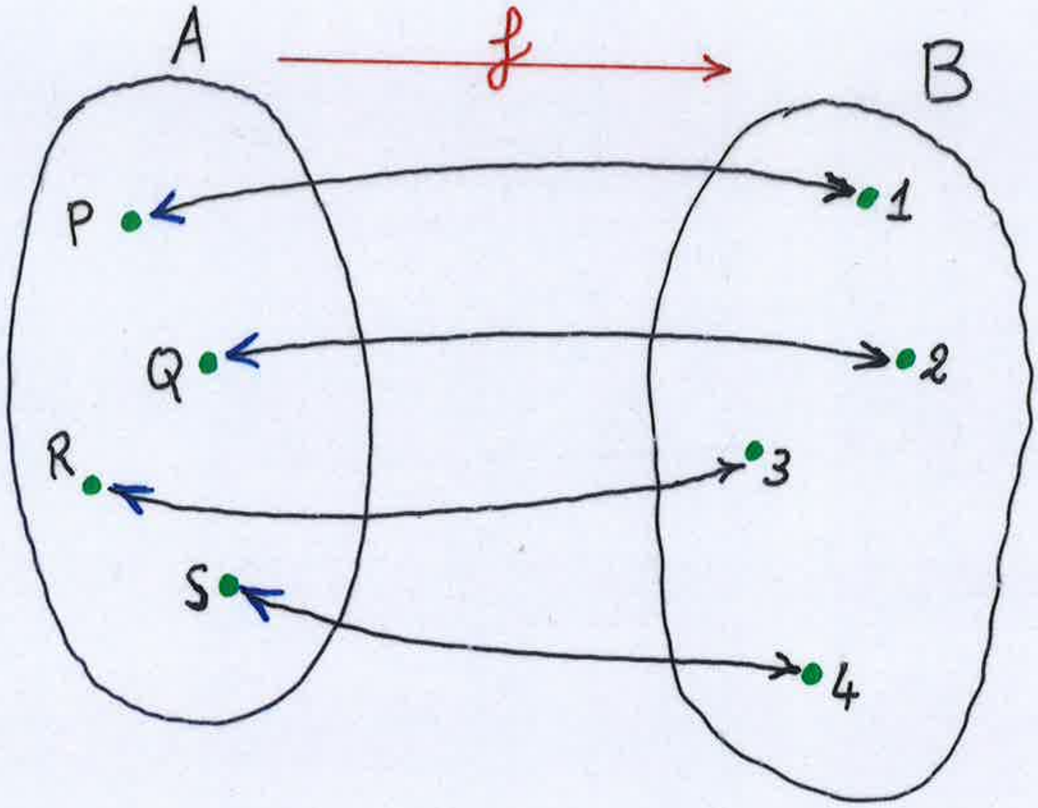
Def $f: A \longrightarrow B$ è una <u>funzione biiettiva</u> (o una <u>biiezione</u> o <u>corrispondenza biunivoca</u>) se f è iniettiva <u>e</u> suriettiva



Esiste $f^{-1}: B \longrightarrow A$ <u>funzione inversa</u> di f

$\left(\mathrm{dom} f^{-1} = B = \mathrm{im} f \text{ e } \mathrm{im} f^{-1} = A = \mathrm{dom} f \right)$

Def $f: A \longrightarrow B$ è una **funzione biiettiva** (o una **biiezione** o **corrispondenza biunivoca**) se f è iniettiva e suriettiva



Esiste $f^{-1}: B \longrightarrow A$ **funzione inversa** di f

$\left(\mathrm{dom} f^{-1} = B = \mathrm{im} f \ \text{ e } \ \mathrm{im} f^{-1} = A = \mathrm{dom} f\right)$

FUNZIONI REALI, DI UNA VARIABILE

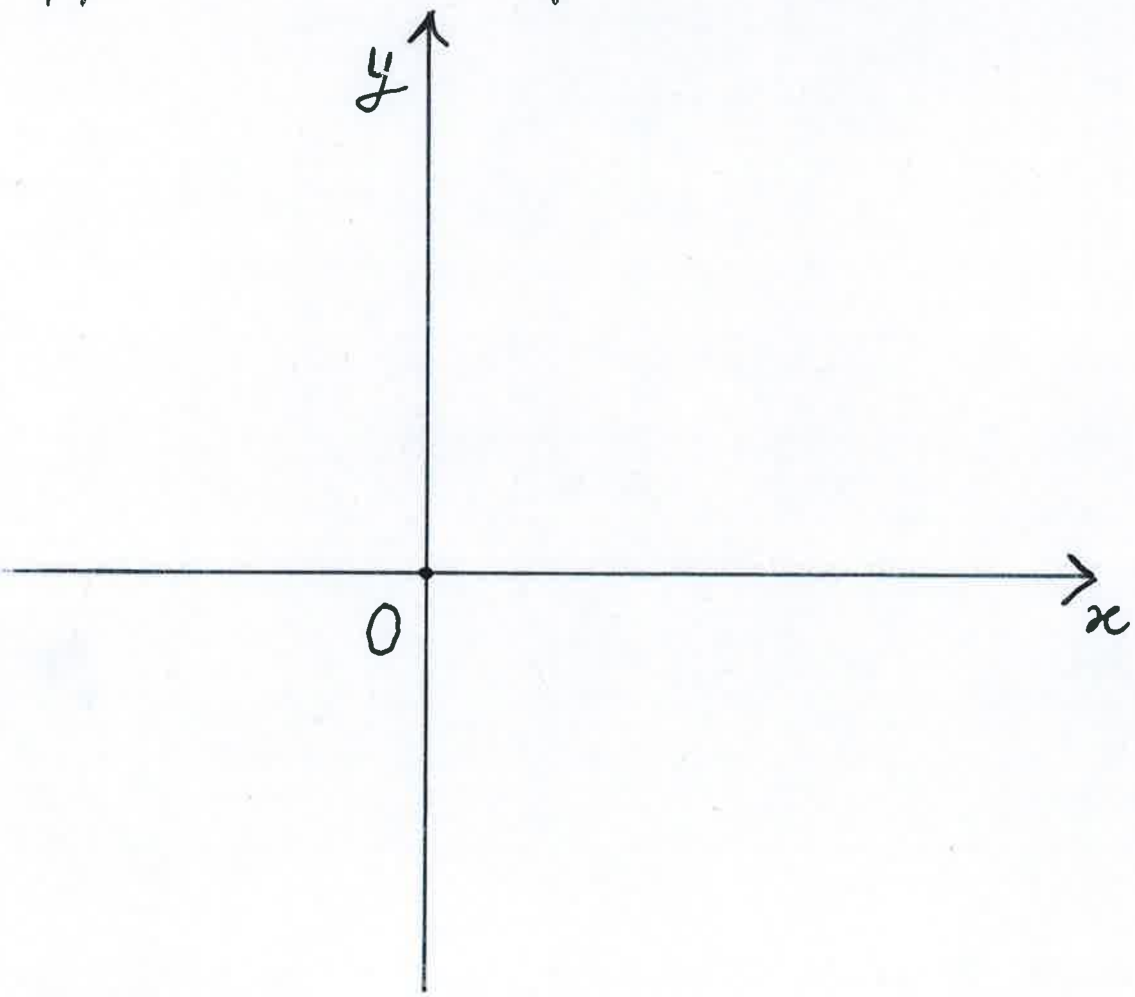
$f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(Se $\mathrm{dom} f = \mathbb{N}$, f si dice <u>successione di numeri reali</u>)

Il grafico di f

$$G = \{ (x, y) \in \mathrm{dom} f \times \mathbb{R} : \ y = f(x) \}$$

si rappresenta nel piano cartesiano



FUNZIONI REALI, DI UNA VARIABILE

$$f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

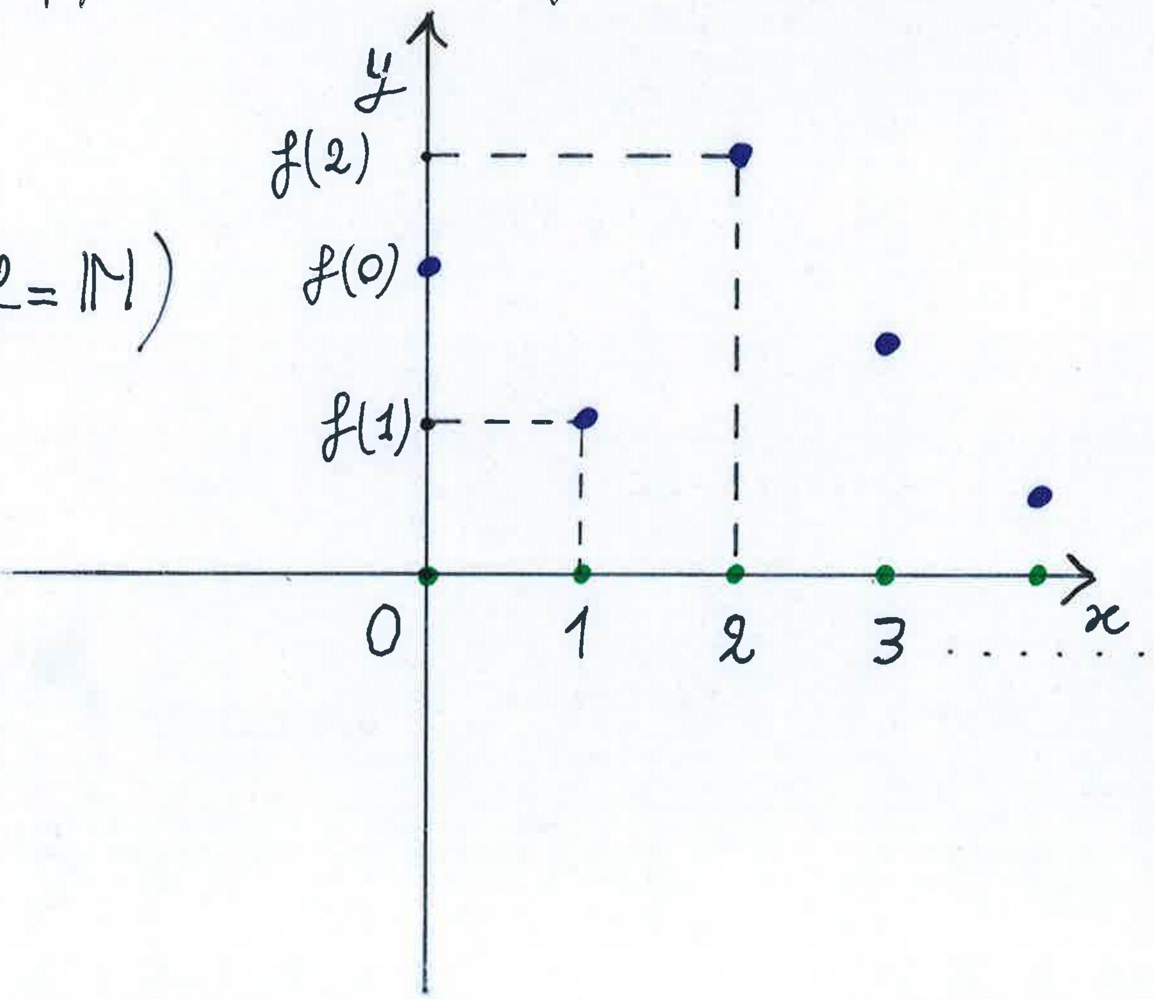
(Se $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$, f si dice successione di numeri reali)

Il grafico di f

$$G = \{(x, y) \in \operatorname{dom} f \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

si rappresenta nel piano cartesiano

($\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$)



FUNZIONI REALI, DI UNA VARIABILE

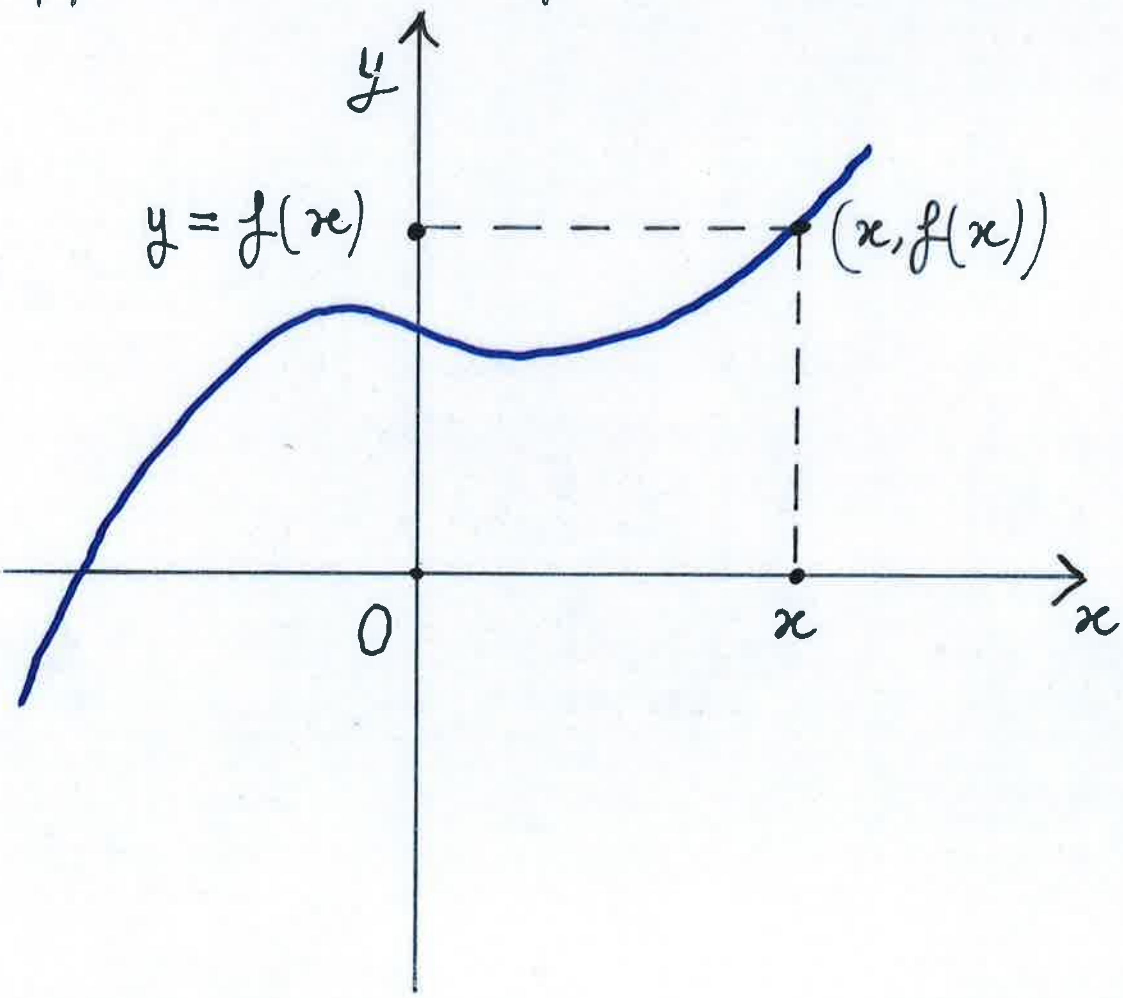
$$f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(Se $\mathrm{dom} f = \mathbb{N}$, f si dice successione di numeri reali)

Il grafico di f

$$G = \{ (x, y) \in \mathrm{dom} f \times \mathbb{R} : \; y = f(x) \}$$

si rappresenta nel piano cartesiano



FUNZIONI REALI, DI UNA VARIABILE

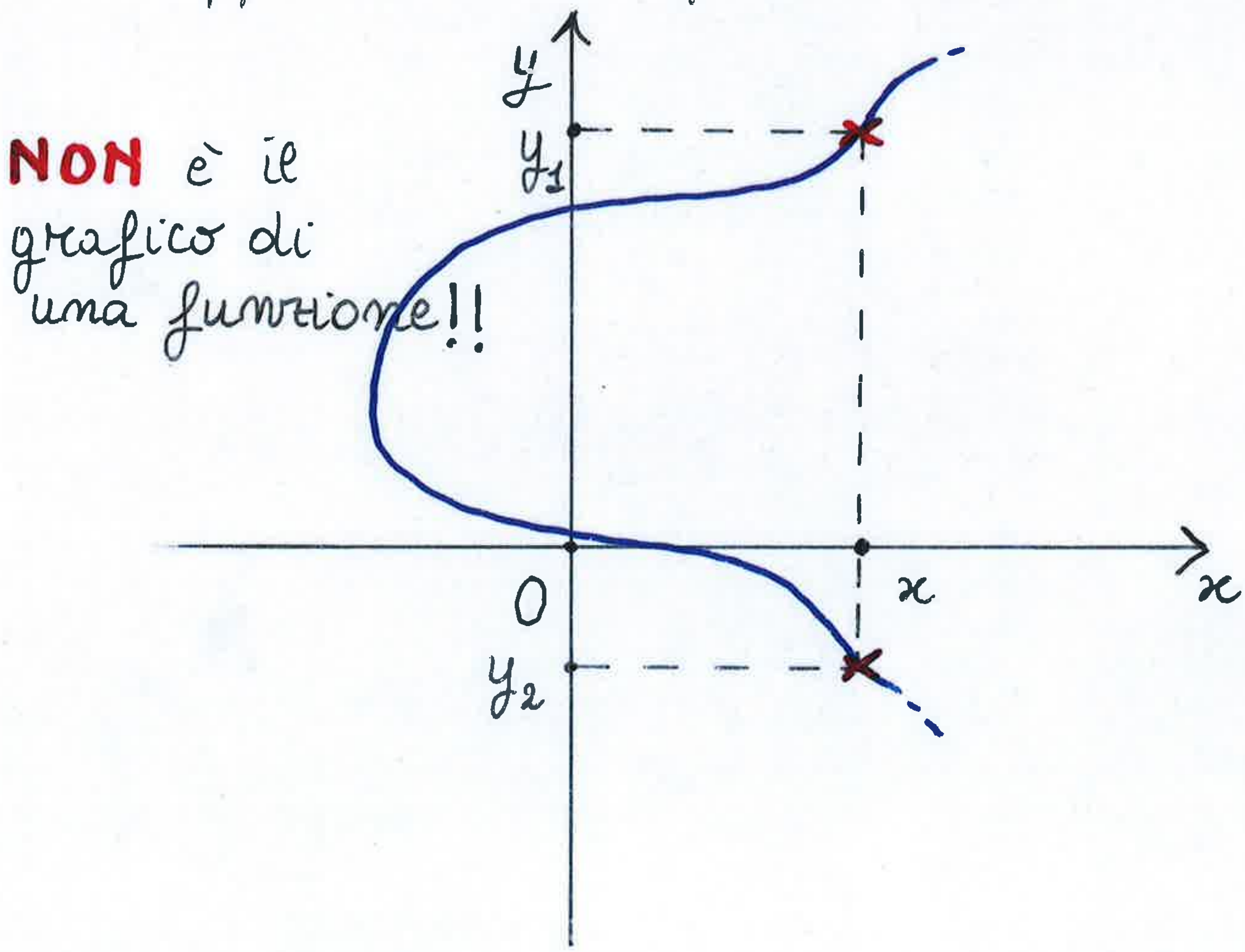
$$f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(Se $\mathrm{dom} f = \mathbb{N}$, f si dice <u>successione di numeri reali</u>)

Il grafico di f

$$G = \{ (x, y) \in \mathrm{dom} f \times \mathbb{R} : \ y = f(x) \}$$

si rappresenta nel piano cartesiano

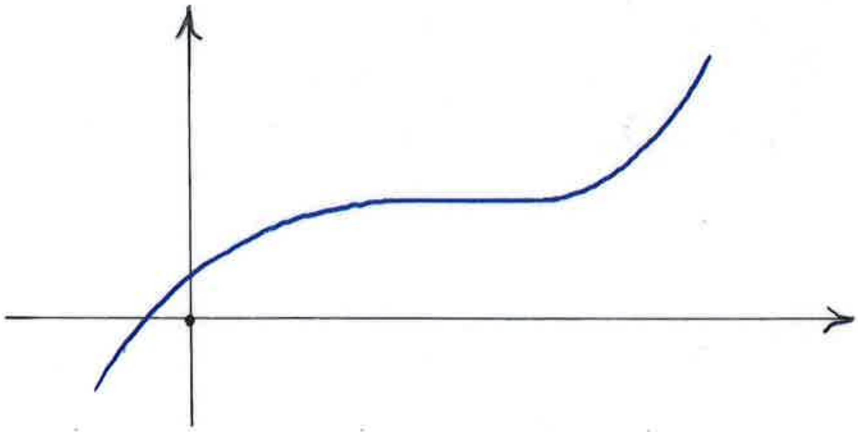


FUNZIONI MONOTONE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

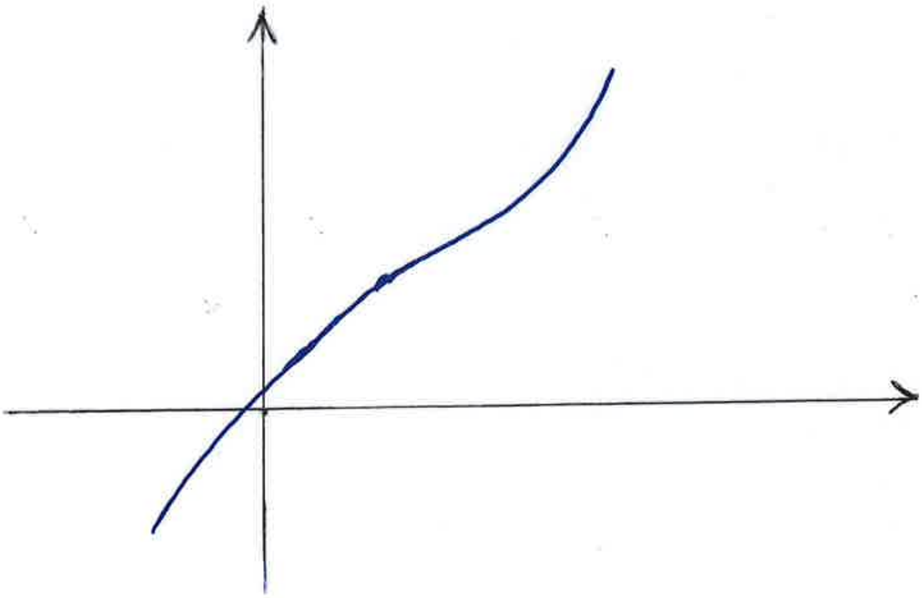
1. f è **crescente** (o **non decrescente**) in A quando:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2) .$$



2. f è **strettamente crescente** in A quando:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) .$$

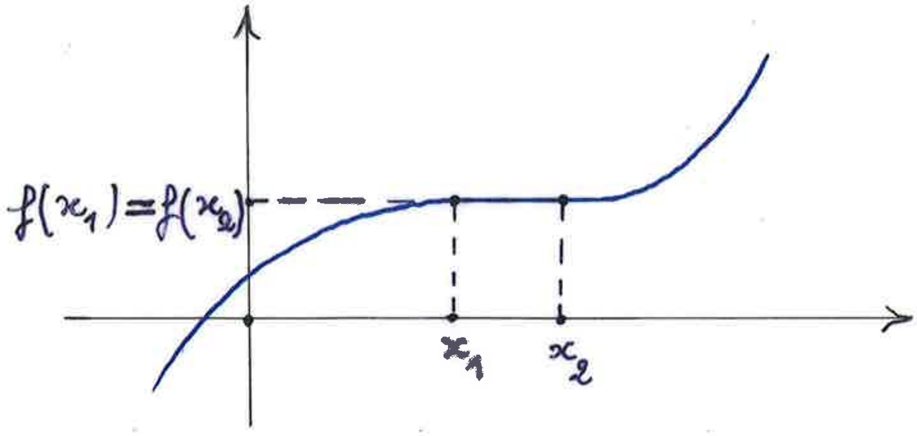


FUNZIONI MONOTONE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$

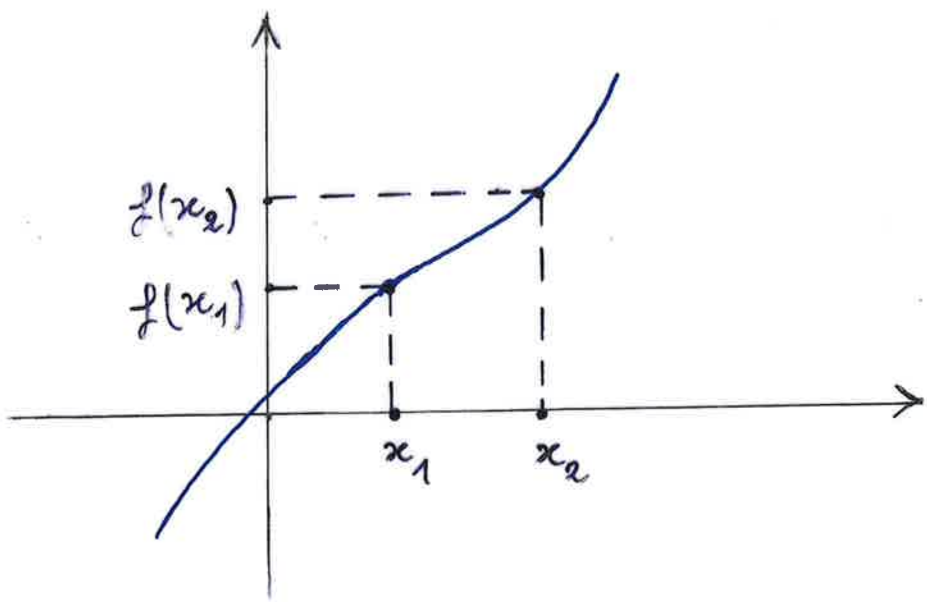
1. f è **crescente** (o **non decrescente**) in A quando:

$$\forall\, x_1\,, x_2 \in A\,, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,.$$



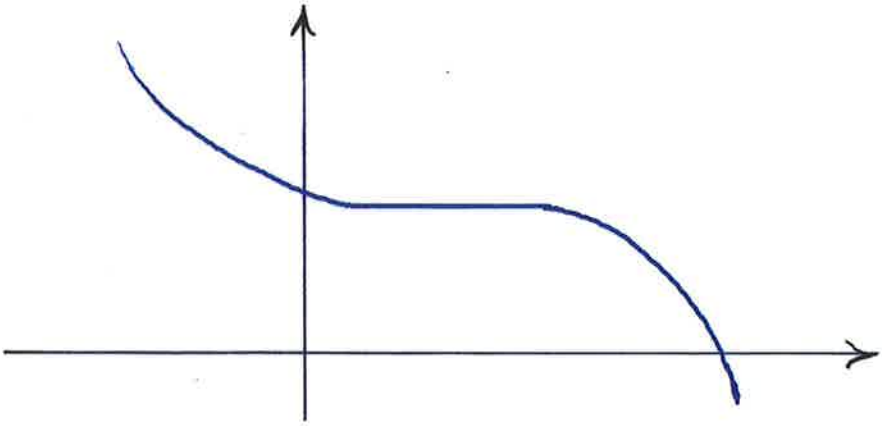
2. f è **strettamente crescente** in A quando:

$$\forall\, x_1\,, x_2 \in A\,, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,.$$



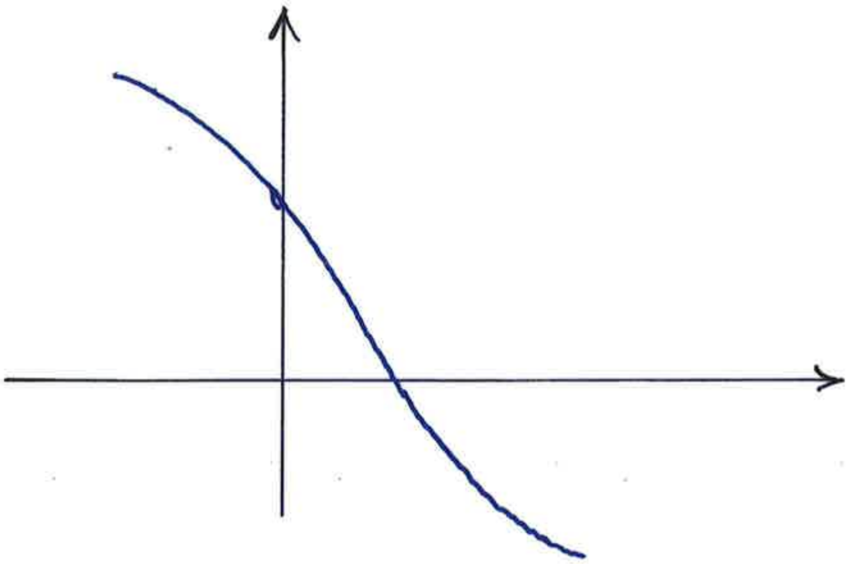
3. f è **decrescente** (o **non crescente**) in A quando:

$$\forall\, x_1\,, x_2 \in A\,, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$



4. f è **strettamente decrescente** in A quando:

$$\forall\, x_1\,, x_2 \in A\,, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,.$$



$$\text{MTA} = \{\text{persone in aula MTA}\}$$

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \dots\dots, Y, Z\}$$

$$f : \text{MTA} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$f(\text{persona in MTA}) = \text{iniziale del suo (primo) cognome}$$

$$\mathrm{MTA} = \{\text{persone in aula MTA}\}$$

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \ldots\ldots, Y, Z\}$$

$$f : \mathrm{MTA} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$f(\text{persona in MTA}) = \text{iniziale del suo (primo) cognome}$$

$$g : \mathcal{A} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$g(\text{vocale}) = 0$$

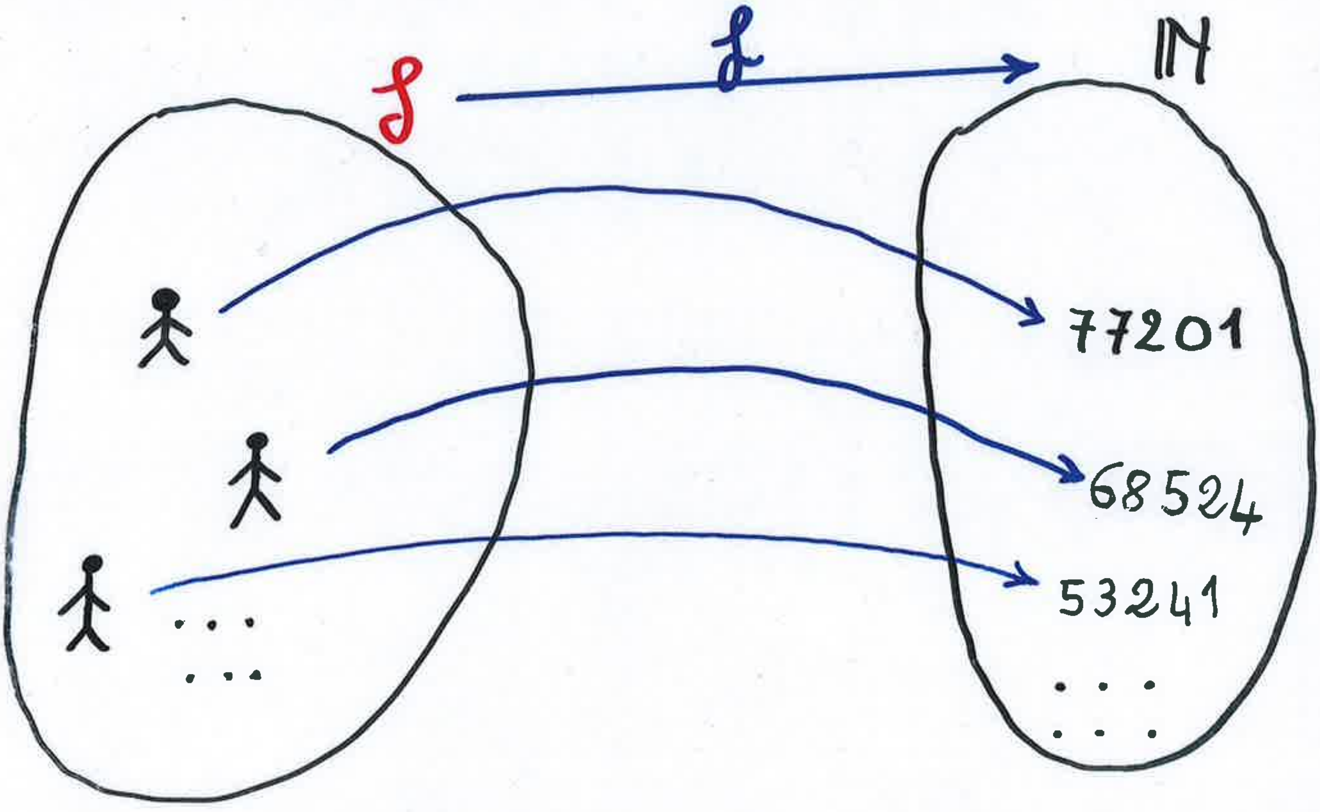
$$g(\text{consonante}) = 1$$

$$g \circ f \quad \mathrm{MTA} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$\mathcal{S} = \{\text{studenti di Ingegneria a Brescia}\}$

$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$

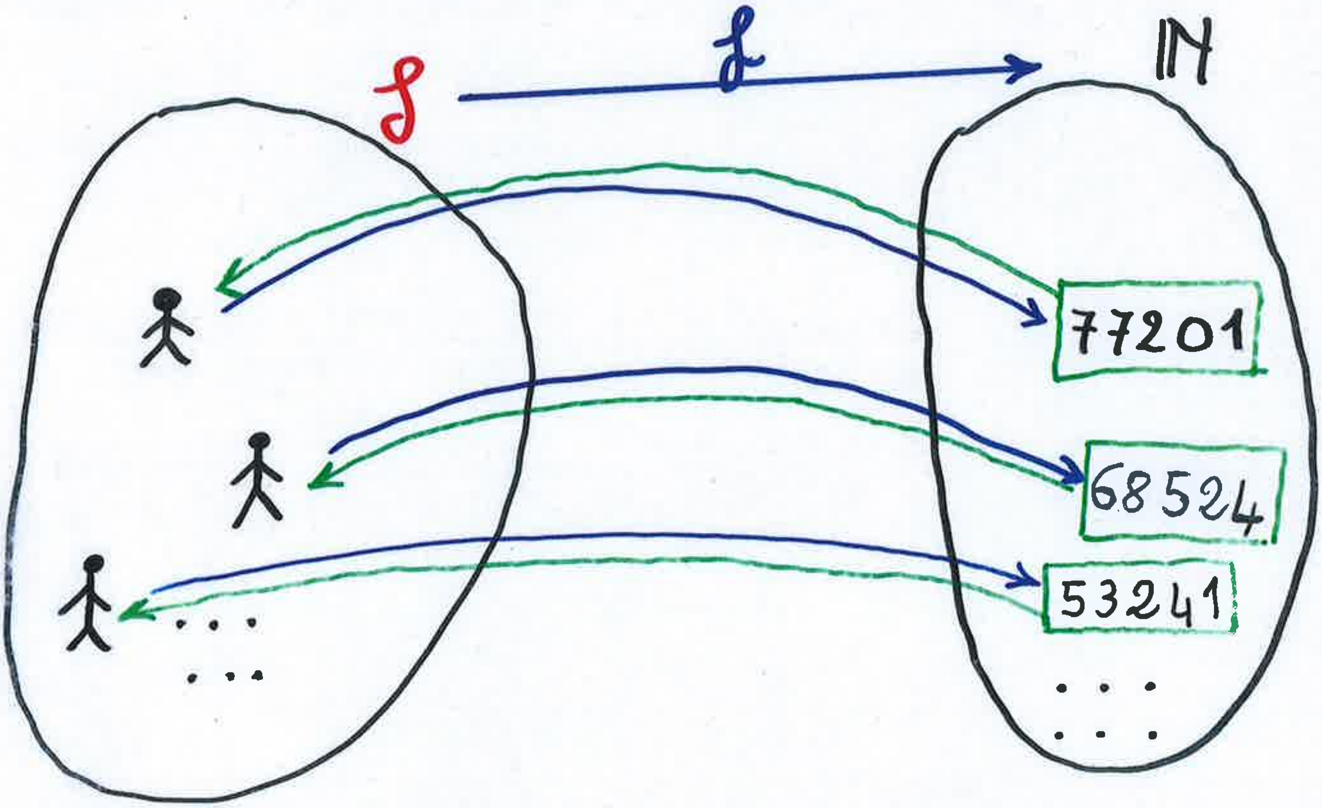
$f(\text{studente}) = \text{n}^{\circ} \text{ di matricola}$



$\mathcal{S} = \{$studenti di Ingegneria a Brescia$\}$

$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(\text{studente}) = $ n° di matricola

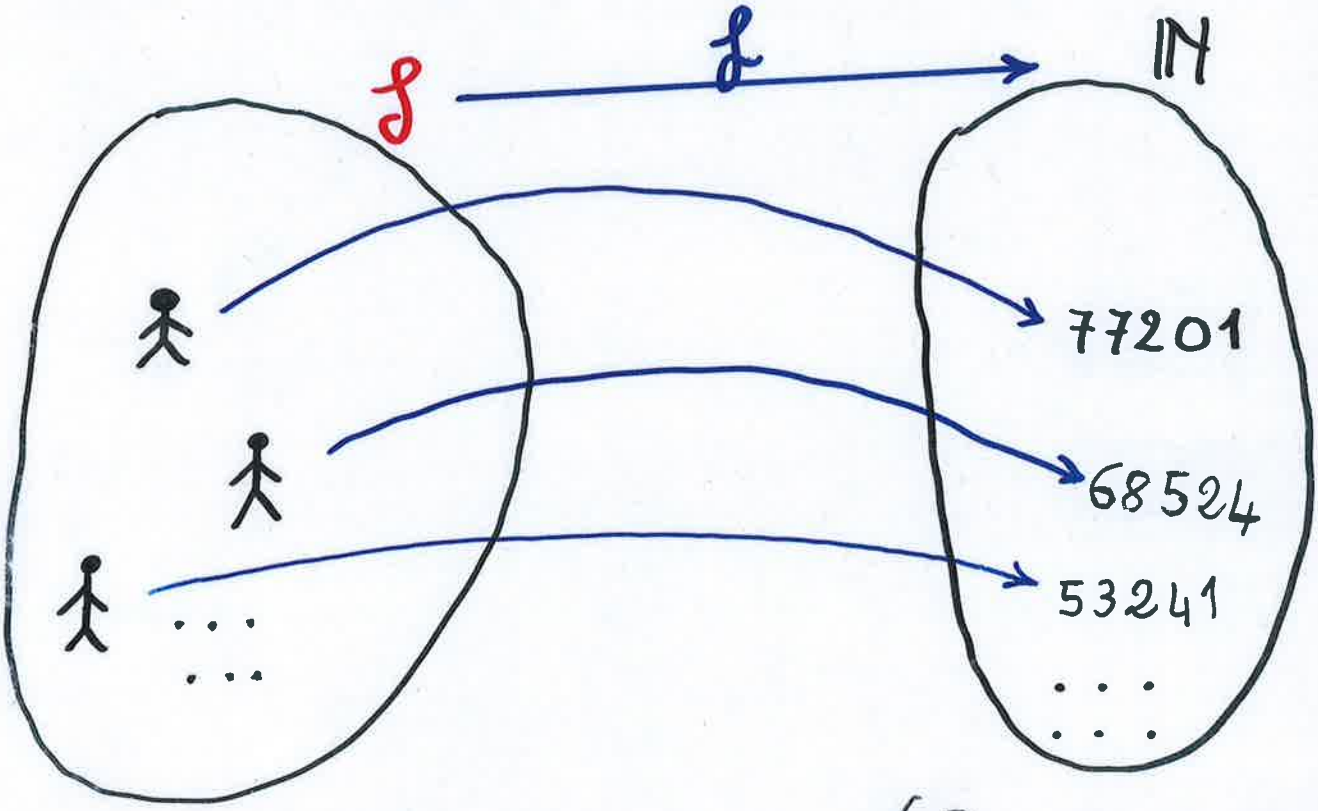


- f iniettiva
- $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{N}$ $\qquad \mathrm{Im}(f) = \{$num. di matricol
- $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathcal{S}$

$\mathcal{S} = \{\text{studenti di Ingegneria a Brescia}\}$

$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(\text{studente}) = \text{n° di matricola}$

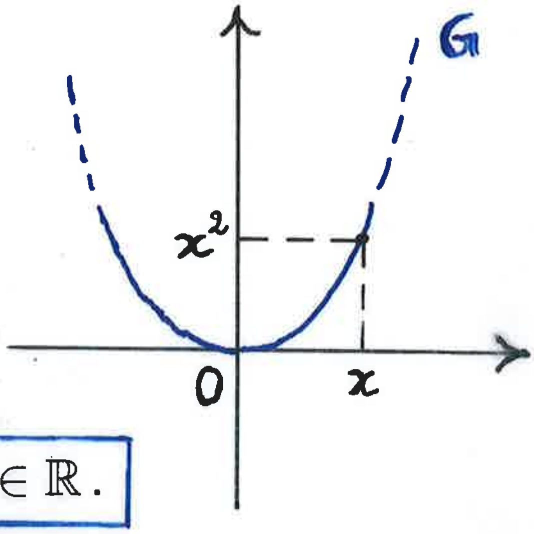


$g \;\; \mathbb{N} \longrightarrow \{P, D\}$ $\qquad g(n) = \begin{cases} P & \text{se } n \text{ pari} \\ D & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

$g \circ f : \mathcal{S} \longrightarrow \{P, D\}$

$g \circ f(\text{studente}) = \begin{cases} P & \text{se num. matr. pari} \\ D & \text{se num. matr. dispari} \end{cases}$

Un esempio



Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\boxed{f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

• Il grafico di f è l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$

• L'immagine di f è

$$imf = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \ y = x^2\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

• f NON è iniettiva; ad esempio $f(-1) = f(1) = 1$.

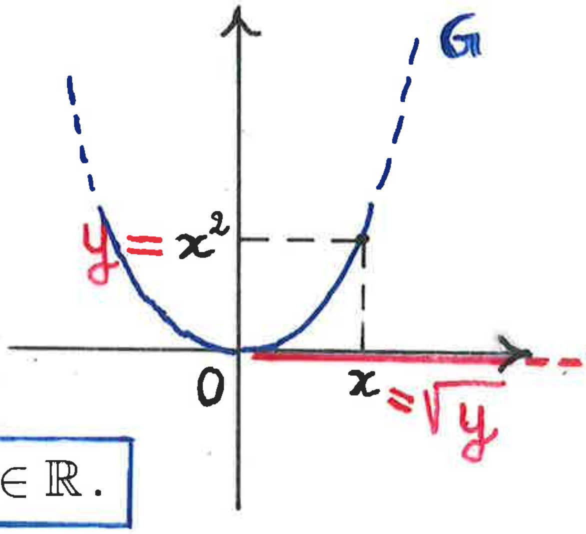
• Sono funzioni iniettive le restrizioni di f sugli insiemi dei numeri reali nonnegativi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e nonpositivi $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, cioè $f_+ = f_{|\mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$ e $f_- = f_{|\mathbb{R}^- \cup \{0\}}$. Le funzioni inverse di f_+ e f_- sono rispettivamente

$$\boxed{\begin{aligned} f_+^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ y &\mapsto +\sqrt{y} \end{aligned}}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned} f_-^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\to \mathbb{R}^- \cup \{0\} \\ y &\mapsto -\sqrt{y} \end{aligned}}$$

Un esempio



Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\boxed{f(x) = x^2\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

- Il grafico di f è l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$

- L'immagine di f è

$$imf = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} : \ y = x^2\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

- f NON è iniettiva; ad esempio $f(-1) = f(1) = 1$.

- Sono funzioni iniettive le restrizioni di f sugli insiemi dei numeri reali nonnegativi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e nonpositivi $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, cioè $f_+ = f_{|\mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$ e $f_- = f_{|\mathbb{R}^- \cup \{0\}}$. Le funzioni inverse di f_+ e f_- sono rispettivamente

$$\boxed{\begin{aligned} f_+^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ y &\mapsto +\sqrt{y} \end{aligned}}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned} f_-^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\to \mathbb{R}^- \cup \{0\} \\ y &\mapsto -\sqrt{y} \end{aligned}}$$