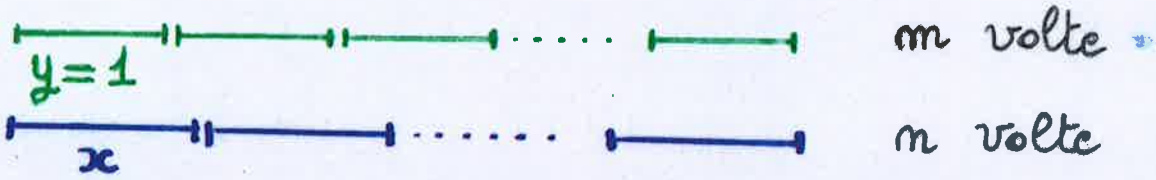
NUMERI REALI: DA $\mathbb{Q}$ AD $\mathbb{R}$

Due "grandezze" x ed y sono *commensurabili* se $\exists\, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{m}{n}} \iff \boxed{nx = my}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = \frac{m}{n}$$

Esitono grandezze **NON** commensurabili!!

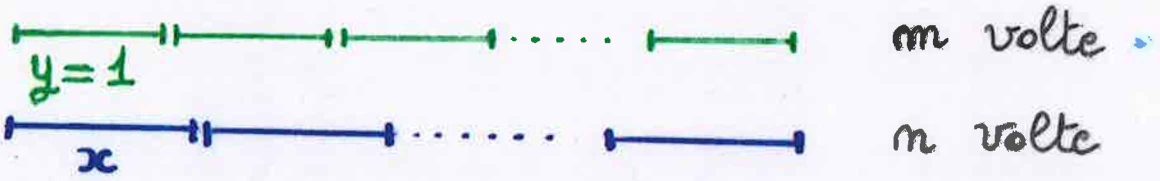


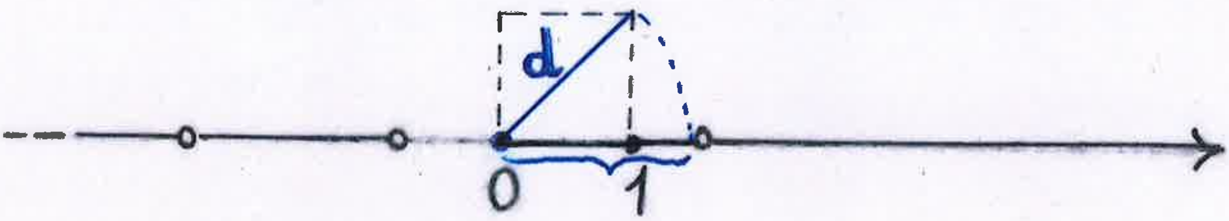
NUMERI REALI: DA $\mathbb{Q}$ AD $\mathbb{R}$

Due "**grandezze**" x **ed** y sono *commensurabili* se $\exists\, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{m}{n}} \iff \boxed{nx = my}$$

Esitono **grandezze NON commensurabili!!**



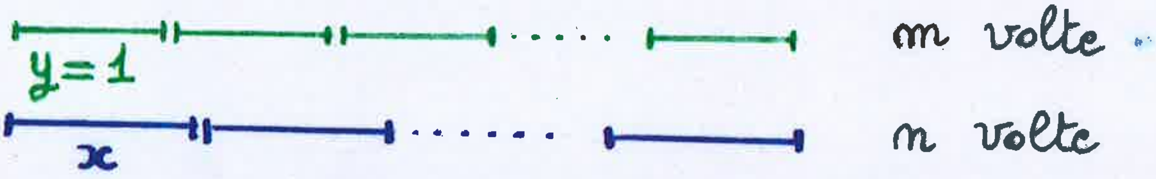


NUMERI REALI: DA $\mathbb{Q}$ AD $\mathbb{R}$

Due "grandezze" x ed y sono *commensurabili* se $\exists\, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{m}{n}} \iff \boxed{nx = my}$$

Esitono grandezze **NON** commensurabili!!



$\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE

Teorema. Se il numero d soddisfa $d^2 = 2$ allora d non è razionale (formalmente: $d^2 = 2 \Rightarrow d \notin \mathbb{Q}$)

DIM. Per assurdo.
Supponiamo $\exists m, n \in \mathbb{N}^+$ tali che

$$\boxed{d = \frac{m}{n}}$$

con m, n primi fra loro (cioè privi di fattori comuni).

$$d = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2 = d^2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 \text{ pari} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m \text{ pari}}$$

Dunque $\exists\, k \in \mathbb{N}^+$: $m = 2k$. Sostituendo in $m^2 = 2n^2$ ricaviamo:

$$4k^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2k^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ pari} \quad \Leftrightarrow \boxed{n \text{ pari}}$$

ASSURDO: m ed n sono primi fra loro!! Dunque $d \notin \mathbb{Q}$. C.V.D.

OPERAZIONI

Un'*operazione su A* è una funzione da A^2 in A.

Def. Denotiamo con $*$ un'operazione su A.

$$* : A^2 \longrightarrow A$$

Notazione: $\forall (a,b) \in A^2$ si scrive $a*b$ al posto di $*(a,b)$.

$*$ si dice *commutativa* se

$$\boxed{a*b = b*a \quad \forall a,b \in A}$$

$*$ si dice *associativa* se

$$\boxed{(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a,b,c \in A}$$

$u \in A$ si dice *elemento neutro* di $*$ se

$$\boxed{a*u = u*a = a \quad \forall a \in A}$$

Definizione assiomatica di R

Elenchiamo le proprietà che rendono **R** un **campo ordinato completo**.

1. R campo

L'operazione di somma $+$ è commutativa, associativa, ammette l'elemento neutro (0) e $\forall x \in \mathbf{R}$ esiste unico l'opposto $-x$ cioè

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists! -x \ : \boxed{x + (-x) = (-x) + x = 0.}$$

$(\mathbb{R}, +)$ è GRUPPO COMMUTATIVO

L'operazione di prodotto $\cdot$ è commutativa, associativa, ammette l'elemento neutro (1) e $\forall x \in \mathbf{R}, x \neq 0$ esiste unico il reciproco x^{-1} cioè

$$\forall x \in \mathbf{R}, x \neq 0\ \exists!\, x^{-1} \ : \boxed{x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.}$$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ è GRUPPO COMMUTATIVO

Le due operazioni sono legate dalla proprietà *distributiva*

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & \forall x, y, z \in \mathbf{R} \\ (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) & \forall x, y, z \in \mathbf{R} \end{array}}$$

2. R campo ordinato

Le due operazioni sono compatibili con la relazione d'ordine totale $\leq$.

$$\forall x, y, z \quad se \quad x \leq y \quad allora \quad x + z \leq y + z$$

$$\forall x, y, z \quad se \quad x \leq y \text{ e } 0 \leq z \quad allora \quad x \cdot z \leq y \cdot z$$

Osservazione. Tutte le proprietà elencate valgono anche per **Q**. Qual è la differenza fra **R** e **Q**?

La risposta è nel concetto di *completezza* che viene introdotto più avanti.

3. R campo ordinato completo

La completezza

Def. Siano $A \subseteq \mathbf{R}$, $M, m \in \mathbf{R}$. Si dice che M è un *maggiorante* per A se

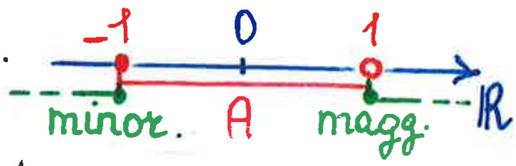
$$\boxed{\forall a \in A \qquad a \leq M.}$$

N.B. M, m in generale non appartengono ad A!!

Si dice che m è un *minorante* per A se

$$\boxed{\forall a \in A \qquad a \geq m.}$$

Esempio 1): $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ -1 \leq x < 1\}$.



I punti 1, 2, 100 sono maggioranti di A.
I punti -1, -3, $-7/5$ sono minoranti di A.
Il punto 0 non è né maggiorante ($0 < \frac{1}{2} \in A$) né minorante ($0 > -1 \in A$) di A.

In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq 1\}$; l'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq -1\}$.

Esempio 2): $A = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ x^2 - 2 \leq 0\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è

$$\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \sqrt{2}\}$$

e l'insieme dei minoranti di A è

$$\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq -\sqrt{2}\}.$$

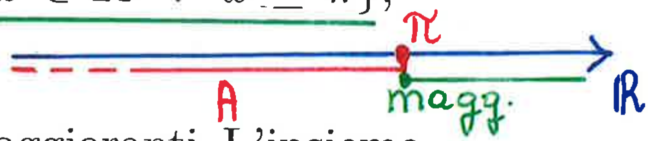
Esempio 3): $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 2 \leq 0\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è

$$\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \sqrt{2}\}$$

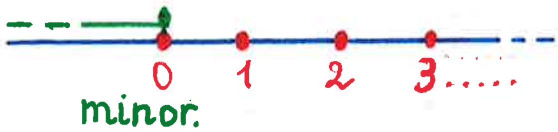
e l'insieme dei minoranti di A è

$$\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq -\sqrt{2}\}.$$

Esempio 4): $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq \pi\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \pi\}$, L'insieme dei minoranti è $\emptyset$.



Esempio 5): $A = \mathbf{N}$. Non esistono maggioranti. L'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq 0\}$.

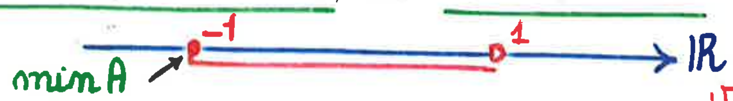


$\square$

Def. Siano $A \subseteq \mathbf{R}$. Si chiama *massimo* di A un maggiorante M di A tale che $M \in A$. Si chiama *minimo* di A un minorante m di A tale che $m \in A$.

Il massimo di A viene denotato con $\max A$; il minimo di A viene denotato con $\min A$.

Nell'esempio 1: A ha minimo $= -1$, ma non ha massimo.



Nell'esempio 2: A non ha né massimo né minimo.

Nell'esempio 3: A ha massimo $= \sqrt{2}$ e minimo $= -\sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\max A = \pi$, $\min A$ non esiste.

Nell'esempio 5: $\min A = \min \mathbf{N} = 0$, $\max A$ non esiste.

Teorema. Massimo e minimo di A sono unici. (se esistono!!)

Dim. (basta provarlo per il minimo) Supponiamo M' e M'' due minimi di A. Allora

$$(1) \qquad M' \in A \qquad M' \leq a \quad \forall a \in A$$

$$(2) \qquad M'' \in A \qquad M'' \leq a \quad \forall a \in A.$$

Abbiamo allora $M' \leq M''$ e $M'' \leq M'$. Dunque $M'' = M'$. $\square$

Def. Diremo che A è un sottoinsieme *superiormente limitato* di $\mathbf{R}$ quando esiste almeno un maggiorante di A:

$$\boxed{\exists\, M \in \mathbf{R} \;:\; \forall a \in A \quad a \leq M.}$$

Diremo che A è un sottoinsieme *inferiormente limitato* di $\mathbf{R}$ quando esiste almeno un minorante di A:

$$\boxed{\exists\, m \in \mathbf{R} \;:\; \forall a \in A \quad a \geq m.}$$

Diremo che A è un sottoinsieme *limitato* di $\mathbf{R}$ quando è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

OSSERVAZIONI: 1) A è un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}$ se e solo se

$$\boxed{\exists\, M \in \mathbf{R} \;:\; \forall a \in A \quad -M \leq a \leq M.}$$

A superiorm. limitato

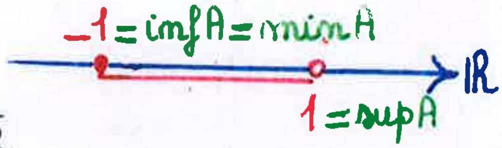
2) A non è superiormente limitato se e solo se

$$\boxed{\forall\, M \in \mathbf{R} \quad \exists\, a \in A \;:\; a \geq M.}$$

Def. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Definiamo l'*estremo superiore* di A (che denoteremo con $\sup A$) il minimo dei maggioranti di A. Definiamo l'*estremo inferiore* di A (che denoteremo con $\inf A$) il massimo dei minoranti di A.

OSSERVAZIONE: $\sup A$ e $\inf A$, se esistono, sono unici (per l'unicità di minimo e massimo).

Nell'esempio 1: si ha $\sup A = 1$, $\inf A = -1$.



Negli esempi 2 e 3: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\sup A = \pi$, ma non esiste $\inf A$.

Nell'esempio 5: $\inf \mathbf{N} = 0$, ma non esiste $\sup \mathbf{N}$.

Oss. $M = \max A$, se esiste, è il più grande elemento di A. Infatti:

$$M \in A \quad \text{e} \quad a \leq M, \ \forall a \in A$$

Oss. Se esiste $M = \max A$, allora $M = \sup A$
$(M = \max A \Rightarrow M = \sup A)$

Infatti: $\forall M'$ maggiorante di A
(cioè $a \leq M'$, $\forall a \in A$)
si ha che $M \leq M'$ (poiché $M \in A$)

Allora

$$M = \min \underbrace{\{M' \in \mathbb{R} : a \leq M', \forall a \in A\}}_{\text{insieme dei maggioranti di } A} = \sup A$$

Caratterizzazione di inf A *e* sup A

Teorema. *Siano* $A \subseteq \mathbf{R}$, $S \in \mathbf{R}$. *Si ha* $S = \sup A$ *se e solo se*

1) $\forall x \in A,\ x \leq S$;

2) $\forall m < S,\ \boxed{\exists x \in A:\ x > m}$.

NEGAZIONE DI : $\forall x \in A,\ x \leq m$

Vale un analogo enunciato per l'estremo inferiore (per esercizio).

Al posto di 2) si può sostituire

2′) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A:\ x > S - \varepsilon.$$

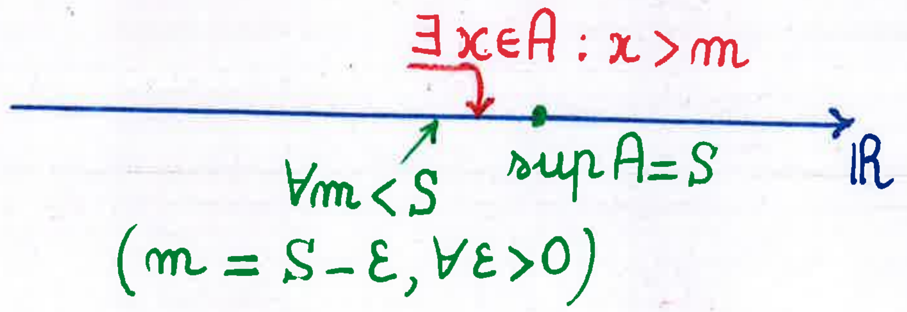
Proposizione. Se $S = \sup A$ (risp. $I = \inf A$) appartiene ad A, allora $S = \max A$ (risp. $I = \min A$).

1) significa che: S è un maggiorante di A

2) significa che: nessun reale $m < S$ è un maggiorante di A

$\Updownarrow$

S è il più piccolo maggiorante di A



$\mathbf{R}$ è un **campo ordinato** *completo*, cioè verifica la seguente proprietà.

Assioma di completezza (o di continuità). *Siano* $A \subseteq \mathbf{R}$, $B \subseteq \mathbf{R}$ *non vuoti tali che*

$$\boxed{a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.}$$

Allora

$$\boxed{\exists c \in \mathbf{R} : \ a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.}$$

Un tale c si dice *elemento separatore* di A e B. Sotto le ipotesi dette, A e B si dicono *classi separate*.

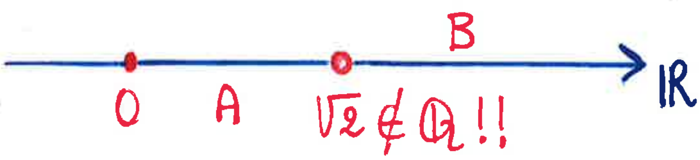
Intuitivamente: $\mathbf{R}$ non ha "buchi", cioè è "continuo". Questa è la proprietà che differenzia $\mathbf{R}$ da $\mathbf{Q}$. Infatti, $\mathbf{Q}$ non è completo.

Esempio. Consideriamo A e B sottoinsiemi di $\mathbf{Q}$ definiti da

$$A = \{a \in \mathbf{Q} : a \geq 0, \ a^2 \leq 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbf{Q} : b > 0, \ b^2 \geq 2\}.$$

Allora vale $\quad a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$



ma non esiste $c \in \mathbf{Q} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$
perchè tale c dovrebbe soddisfare $c^2 = 2$.
Un tale c non può appartenere a $\mathbf{Q}$ (sarebbe $\sqrt{2}$ che non è razionale).

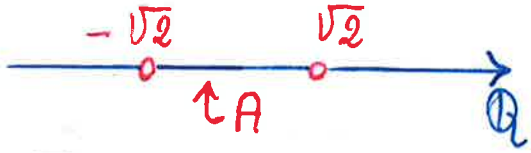
Dall'assioma di completezza segue il

Teorema (di completezza). *Ogni sottoinsieme di* $\mathbf{R}$ *non vuoto e superiormente (risp. inferiormente) limitato ammette estremo superiore (risp. inferiore).*

Notiamo che il teorema non vale per i sottoinsiemi di $\mathbf{Q}$. !!

Ad esempio, consideriamo

$$A = \{x \in \mathbf{Q} \; : \; x^2 \leq 2\}.$$

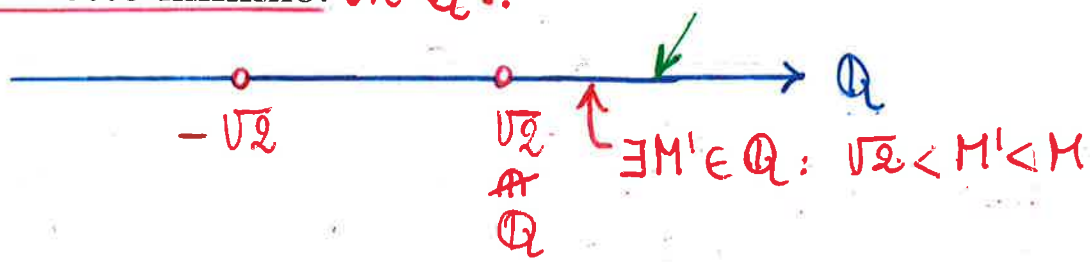


A è non vuoto e superiormente limitato. Eppure non esiste $\sup A$ in $\mathbf{Q}$. Infatti, l'insieme dei maggioranti di A è

$$\{x \in \mathbf{Q} \; : \; x \geq \sqrt{2}\} = \{x \in \mathbf{Q} \; : \; x > \sqrt{2}\}$$

che non ammette minimo. in $\mathbb{Q}$!!

$\forall M > \sqrt{2} \quad M \in \mathbb{Q}$



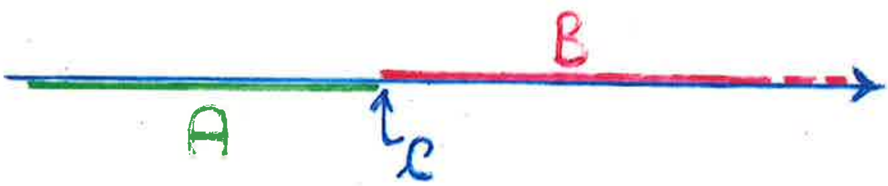
$\forall M > \sqrt{2}$ e $M \in \mathbb{Q} \;\; \exists M' \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < M' < M$

NUMERI REALI

Dimostrazione del Teorema di completezza. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, superiormente limitato
$\Rightarrow A$ ammette almeno un maggiorante (cioè $\exists\, M \in \mathbb{R}$: $a \leq M$, $\forall\, a \in A$).
Poniamo $B \neq \emptyset$ l'insieme di tutti i maggioranti di A, cioè

$$B = \{M \in \mathbb{R} : \; a \leq M \,, \; \forall\, a \in A\} \,.$$

Per definizione, A e B sono classi separate



Assioma di completezza $\Rightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ elemento separatore

- $a \leq c$, $\forall\, a \in A \Rightarrow \boxed{c \in B}$ (c è un maggiorante di A)

- $c \leq M$, $\forall\, M \in B \Rightarrow$ $\boxed{c \text{ è minorante di B}}$

Allora $c = \min B = \sup A$.

LA RETTA ESTESA

I simboli $+\infty$ **e** $-\infty$ **:** si estende la relazione d'ordine $\leq$ ponendo

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R} \quad -\infty \leq x \leq +\infty}$$

Def. *retta reale estesa* $\boxed{\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}}$

Attenzione: $+\infty$ e $-\infty$ sono simboli e non numeri reali!

Osservazione: $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato e si ha: $\forall A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$, $+\infty$ è maggiorante di A (e $-\infty$ è minorante di A).

Teorema. $\forall A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ $\exists \sup A, \inf A \in \overline{\mathbf{R}}$. Se $A \subseteq \mathbf{R}$, allora

i) $\sup A = +\infty \Longleftrightarrow A$ non è sup. lim.;

ii) $\inf A = -\infty \Longleftrightarrow A$ non è inf. lim.;

iii) $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

Dim. (per il sup) $A \neq \emptyset$. Se $+\infty \in A$, allora $+\infty = \sup A = \max A$. Escludendo il caso $A = \{-\infty\}$, resta da considerare il caso $A \subseteq \mathbf{R}$.

i) A sup. lim. $\Longrightarrow \exists \sup A \in \mathbf{R} \Longrightarrow \exists \sup A \in \overline{\mathbf{R}}$; A non sup. lim. $\Longleftrightarrow$ maggioranti $= \{+\infty\} \Longleftrightarrow \sup A = +\infty$;