CENNI DI LOGICA E DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il "linguaggio matematico"

Abbiamo la necessità di un linguaggio preciso, che non dia luogo a interpretazioni diverse a causa di qualche ambiguità.

Attraverso questo studio definiamo uno strumento per l'analisi dei metodi corretti di ragionamento, fondamentale in certi casi in cui il ragionamento diventa particolarmente sottile da un punto di vista logico.

Gli elementi fondamentali del linguaggio:

Quantificatori

$\forall$ (per ogni - quantificatore universale)

$\exists \ldots : \ldots$ (esiste...tale che... - quantificatore esistenziale)

$\exists! \ldots : \ldots$ (esiste unico...tale che...)

Importanza sostanziale dell'ordine in cui sono quantificate le variabili di una "frase".

CENNI DI LOGICA E DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il "linguaggio matematico"

Abbiamo la necessità di un linguaggio preciso, che non dia luogo a interpretazioni diverse a causa di qualche ambiguità.

Attraverso questo studio definiamo uno strumento per l'analisi dei metodi corretti di ragionamento, fondamentale in certi casi in cui il ragionamento diventa particolarmente sottile da un punto di vista logico.

Gli elementi fondamentali del linguaggio:

Quantificatori $x \in \mathbb{R}$ $x > 2$

$\forall$ (per ogni - quantificatore universale)

$\exists \ldots : \ldots$ (esiste...tale che... - quantificatore esistenziale)

$\exists! \ldots : \ldots$ (esiste unico...tale che...)

Importanza sostanziale dell'ordine in cui sono quantificate le variabili di una "frase".

CENNI DI LOGICA E DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il "linguaggio matematico"

Abbiamo la necessità di un linguaggio preciso, che non dia luogo a interpretazioni diverse a causa di qualche ambiguità.

Attraverso questo studio definiamo uno strumento per l'analisi dei metodi corretti di ragionamento, fondamentale in certi casi in cui il ragionamento diventa particolarmente sottile da un punto di vista logico.

Gli elementi fondamentali del linguaggio:

Quantificatori $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x > 2$ Falsa

$\forall$ (per ogni - quantificatore universale)

$\exists \ldots : \ldots$ (esiste...tale che... - quantificatore esistenziale)

$\exists! \ldots : \ldots$ (esiste unico...tale che...)

Importanza sostanziale dell'ordine in cui sono quantificate le variabili di una "frase".

CENNI DI LOGICA E DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il "linguaggio matematico"

Abbiamo la necessità di un linguaggio preciso, che non dia luogo a interpretazioni diverse a causa di qualche ambiguità.

Attraverso questo studio definiamo uno strumento per l'analisi dei metodi corretti di ragionamento, fondamentale in certi casi in cui il ragionamento diventa particolarmente sottile da un punto di vista logico.

Gli elementi fondamentali del linguaggio:

Quantificatori $\exists\, x \in \mathbb{R} : x > 2$ Vera

$\forall$ (per ogni - quantificatore universale)

$\exists \ldots : \ldots$ (esiste...tale che... - quantificatore esistenziale)

$\exists! \ldots : \ldots$ (esiste unico...tale che...)

Importanza sostanziale dell'ordine in cui sono quantificate le variabili di una "frase".

CENNI DI LOGICA E DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il "linguaggio matematico"

Abbiamo la necessità di un linguaggio preciso, che non dia luogo a interpretazioni diverse a causa di qualche ambiguità.

Attraverso questo studio definiamo uno strumento per l'analisi dei metodi corretti di ragionamento, fondamentale in certi casi in cui il ragionamento diventa particolarmente sottile da un punto di vista logico.

Gli elementi fondamentali del linguaggio:

Quantificatori $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x > 2$ Falsa

$\forall$ (per ogni - quantificatore universale)

$\exists \ldots : \ldots$ (esiste...tale che... - quantificatore esistenziale)

$\exists! \ldots : \ldots$ (esiste unico...tale che...) ←

Importanza sostanziale dell'ordine in cui sono quantificate le variabili di una "frase".

Esempio: "Esiste un intero più grande di ogni intero".

A. $\exists$ intero y : $\forall$ intero x, $y > x$;

B. $\forall$ intero x $\exists$ intero y : $y > x$.

A che è la corretta trasposizione dell'esempio è una affermazione *falsa*. Invece B non è la corretta trasposizione dell'esempio, ma è una affermazione *vera*.

Proposizioni

"frasi sensate che non contengono variabili libere e che sono vere oppure false". Le indichiamo con $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ...

Predicati

"frasi sensate che contengono una (o più) variabili libere. Li indichiamo con $\mathcal{P}(x, y, \ldots), \ldots$

Una proposizione è *vera* o *falsa*. Se $\mathcal{P}$ è vera, allora la negazione *non*$\mathcal{P}$ è falsa e viceversa.

Esempio: "Esiste un intero più grande di ogni intero".

A. $\exists$ intero y : $\forall$ intero x, $y > x$;

B. $\forall$ intero x $\exists$ intero y : $y > x$.

A che è la corretta trasposizione dell'esempio è una affermazione *falsa*. Invece B non è la corretta trasposizione dell'esempio, ma è una affermazione *vera*.

Proposizioni

"frasi sensate che non contengono variabili libere e che sono vere oppure false". Le indichiamo con $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ...

Predicati

"frasi sensate che contengono una (o più) variabili libere. Li indichiamo con $\mathcal{P}(x, y, \ldots), \ldots$

Una proposizione è *vera* o *falsa*. Se $\mathcal{P}$ è vera, allora la negazione *non*$\mathcal{P}$ è falsa e viceversa.

Connettivi logici

non (negazione) La proposizione con contenuto contrario. $P \rightsquigarrow \text{non} P$

e ($\wedge$) (congiunzione) Date due proposizioni, la proposizione nella quale valgono sia la prima che la seconda. $P, Q \rightsquigarrow P \wedge Q$

o ($\vee$) (disgiunzione) Date due proposizioni, la proposizione nella quale vale almeno una delle due. $P, Q \rightsquigarrow P \vee Q$

$\Longrightarrow$ (implicazione)

$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$.

$\Longleftrightarrow$ (se e solo se, doppia implicazione)

$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ vuol dire $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$. Condizione necessaria e sufficiente.

Equivalenze

A. *non*($\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$) equivale a *non*$\mathcal{P}$ *o* *non*$\mathcal{Q}$;

B. *non*($\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$) equivale a *non*$\mathcal{P}$ *e* *non*$\mathcal{Q}$;

$e \xleftrightarrow{\text{non}} o$

C. *non*$(\forall x, \mathcal{Q}(x))$ equivale a $\exists x :$ *non*$\mathcal{Q}(x)$;

D. *non*$(\exists x : \mathcal{Q}(x))$ equivale a $\forall x$ *non*$\mathcal{Q}(x)$;

$\forall \xleftrightarrow{\text{non}} \exists$

E. $\boxed{\text{P} \Longrightarrow \text{Q equivale a } non \text{ Q} \Longrightarrow non \text{ P.}}$

F. non($P \Rightarrow Q$) equivale a P e non Q

Operazioni logiche sulle proposizioni. Qualche esempio

$\mathcal{P}$: "3 è un numero pari" FALSA
$\mathcal{Q}$: "4 non è un numero primo" VERA

- non $\mathcal{P}$: "3 **non** è un numero pari" VERA

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$: "3 è un numero pari **e** 4 non è un numero primo" FALSA

- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$: "3 è un numero pari **oppure** 4 non è un numero primo" VERA

- non $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$: "3 **non** è un numero pari **oppure** 4 **è** un numero primo"$=(\text{non}\,\mathcal{P}) \vee (\text{non}\,\mathcal{Q})$ VERA

- non $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$: "3 **non** è un numero pari **e** 4 **è** un numero primo"$=(\text{non}\,\mathcal{P}) \wedge (\text{non}\,\mathcal{Q})$ FALSA

IMPLICAZIONE. Un esempio banale

$\mathcal{P}$: "Lassie è un cane"

$\mathcal{Q}$: "Lassie è un mammifero"

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: "**Se** Lassie è un cane **allora** è un mammifero".

Terminologia associata all'uso dell'implicazione

- $\mathcal{P}$ è condizione SUFFICIENTE per $\mathcal{Q}$: l'essere un cane basta per essere un mammifero.

- $\mathcal{Q}$ è condizione NECESSARIA per $\mathcal{P}$: l'essere un mammifero è un requisito indispensabile per essere un cane, ovvero **se** Lassie non è un mammifero **allora** certamente non può essere un cane. Quindi:

$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \Leftrightarrow \quad [\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}]$

- **Negare** $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ significa negare che $\mathcal{Q}$ sia indispensabile per la validità di $\mathcal{P}$, ovvero significa affermare che $\mathcal{P}$ può valere (essere vera) quando non vale $\mathcal{Q}$, cioè:

$$[\text{non}\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{P} \wedge (\text{non}\,\mathcal{Q})]$$

- In generale:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \quad \text{è DIVERSO da} \quad \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$$

DOPPIA IMPLICAZIONE (O BIIMPLICAZIONE)

$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ significa: $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \;\wedge\; \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ e si legge:

"$\mathcal{P}$ ($\mathcal{Q}$) è condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE per $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}$)"

" P se e solo se Q "

" P equivale a Q "

Esempio:

$\mathcal{P}$: "Il triangolo T ha due lati uguali"

$\mathcal{Q}$: "Il triangolo T ha due angoli uguali"

Un esempio matematico

Data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

- La derivabilità in x_0 è condizione SUFFICIENTE per la continuità in x_0

- La continuità in x_0 è condizione NECESSARIA per la derivabilità in x_0 (ovvero se f NON è continua in x_0 allora f NON è derivabile in x_0).

Forma tipica dell'enunciato di un Teorema

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & & \mathcal{Q} \\ \textsf{Ipotesi} & \Rightarrow & \textsf{Tesi} \end{array}}$$

L'equivalenza

$$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \Leftrightarrow \quad [\text{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{P}]$$

viene utilizzata nella

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO. PRIMA FORMA

È noto che l'Ipotesi $\mathcal{P}$ è vera e si vuole provare la veridicità dell'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e, quindi, della Tesi $\mathcal{Q}$; ma, da quanto predetto, ciò equivale a verificare che se non si avvera $\mathcal{Q}$ allora non può avverarsi $\mathcal{P}$. Dunque si prova che

$$\text{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{P}\,.$$

Si parte cioè dalla negazione della Tesi $\mathcal{Q}$ e si dimostra che, da ciò, discende la negazione dell'Ipotesi $\mathcal{P}$. Ma questo è **ASSURDO**, perchè l'ipotesi $\mathcal{P}$ è un fatto vero! Dunque anche la Tesi $\mathcal{Q}$ deve essere vera.

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO. SECONDA FORMA

È noto che l'Ipotesi $\mathcal{P}$ è vera e si vuole provare la veridicità dell'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (quindi della Tesi $\mathcal{Q}$). Si parte ancora dalla negazione di $\mathcal{Q}$ e, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, si perviene a dimostrare la veridicità di una terza proposizione $\mathcal{R}$ che, a priori, è già noto essere FALSA (da cui l'**ASSURDO**).

Insiemi e sottoinsiemi

1. In generale, gli insiemi verranno “definiti” con una scrittura del tipo (mediante una proprietà)

$$A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$$

2. dove $\mathcal{U}$ indica un insieme ambiente. A volte, verranno definiti mediante un elenco

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

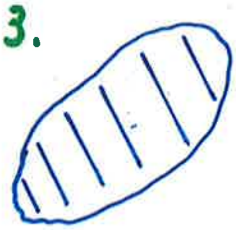
3. 

diagramma di Venn

Notazioni:

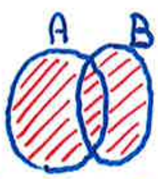
$x \in A$ (x appartiene all'insieme A) 

$x \notin A$ (x non appartiene all'insieme A) 

$A \subseteq B$ (A è *sottoinsieme* di B) 

ovvero $x \in A \Longrightarrow x \in B$. La negazione è $A \not\subseteq B$.

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

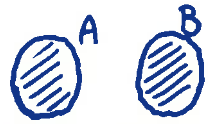


$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\} \ (\textit{unione})$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \ (\textit{intersezione})$$

$\emptyset$ denota l'*insieme vuoto*

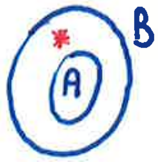
A e B sono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$



$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

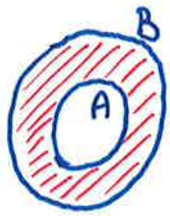
$$A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \setminus A \neq \emptyset$$

(*stretta inclusione* di A in B)



$$A \subseteq B, \quad \mathcal{C}(A) = \{x : x \in B \text{ e } x \notin A\} = B \setminus A$$

(*complementare* di A in B)



INSIEMI NUMERICI E LORO STRUTTURA

$\mathbf{N}$ insieme dei numeri *naturali*

ovvero $0, 1, 2, 3, \ldots$

$\mathbf{Z}$ insieme dei numeri *interi*

ovvero $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

$\mathbf{Q}$ insieme dei numeri *razionali*

ovvero le frazioni m/n dove $m, n \in \mathbf{Z}$ e $n \neq 0$.

$\mathbf{R}$ insieme dei numeri *reali*

quali per esempio π, $\sqrt{2}$, e (numero di Nepero),. . .

$\mathbf{C}$ insieme dei numeri *complessi*

ovvero numeri della forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$ e $i^2 = -1$.

Abbiamo le inclusioni

$$\boxed{\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}}$$

Altri insiemi: $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{R}^+$ (interi *strettamente* positivi, etc).

$\square$

Esempi:

1) $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{n \in \mathbf{N}^+ : n \leq 3\} \Longrightarrow A = B$

2) $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{3,4,5\}$

$1 \in A, \qquad 4 \notin A \qquad A \cup B = \{1,2,3,4,5\},$

$A \cap B = \{3\}, \quad A \setminus B = \{1,2\}$

INSIEME DELLE PARTI dell'insieme E

$$2^E = \mathcal{P}(E) := \{A : A \subseteq E\}$$

insieme di tutti i sottoinsiemi di E

Esempio:

$E = \{1,2,3\}$

$2^E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$

$2^3 = 8$ elementi.

INSIEMI PRODOTTO

Se A e B sono insiemi, il *prodotto (cartesiano)* $A \times B$ è definito da

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

Gli oggetti del tipo (a, b) vengono detti *coppie* (o "coppie ordinate"), ed hanno la proprietà che

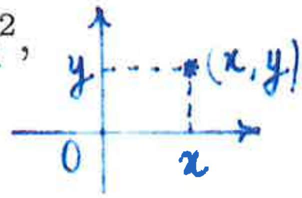
$A = B$

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a' \ e \ b = b')$$

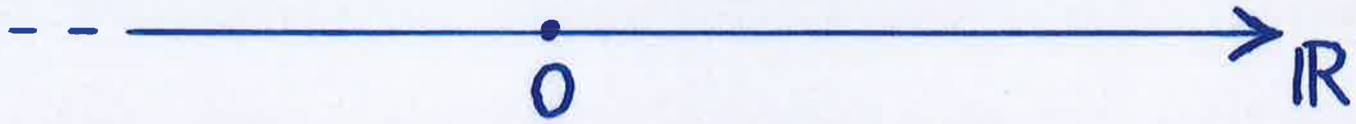
$(a,b) \neq (b,a)$
per $a \neq b$!!

(a differenza dell'*insieme* $\{a, b\} = \{b, a\}$)

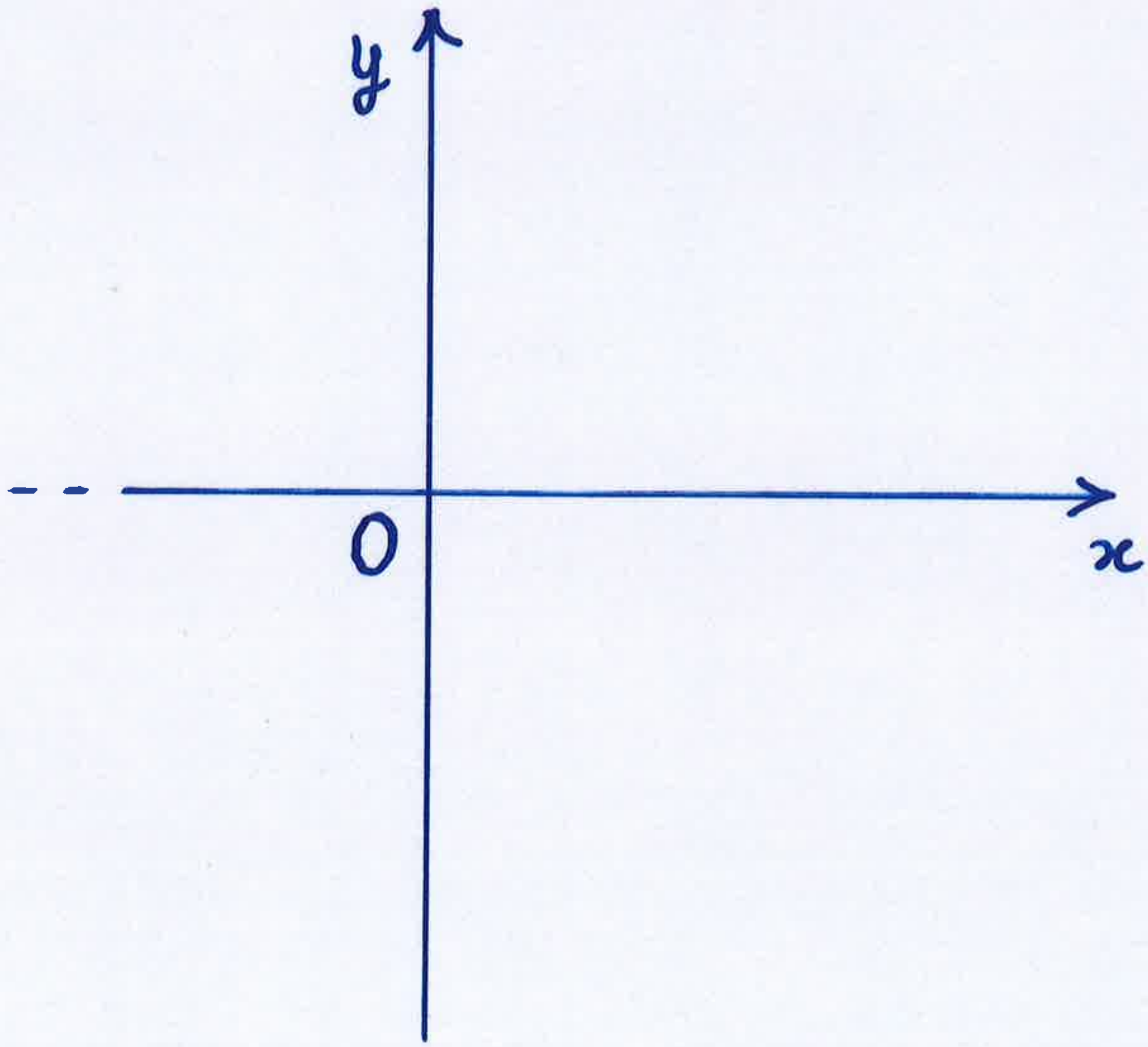
Scriveremo $A \times A = A^2$. È ben noto l'insieme $\mathbf{R}^2$, che si identifica con il "piano Cartesiano"



RETTA

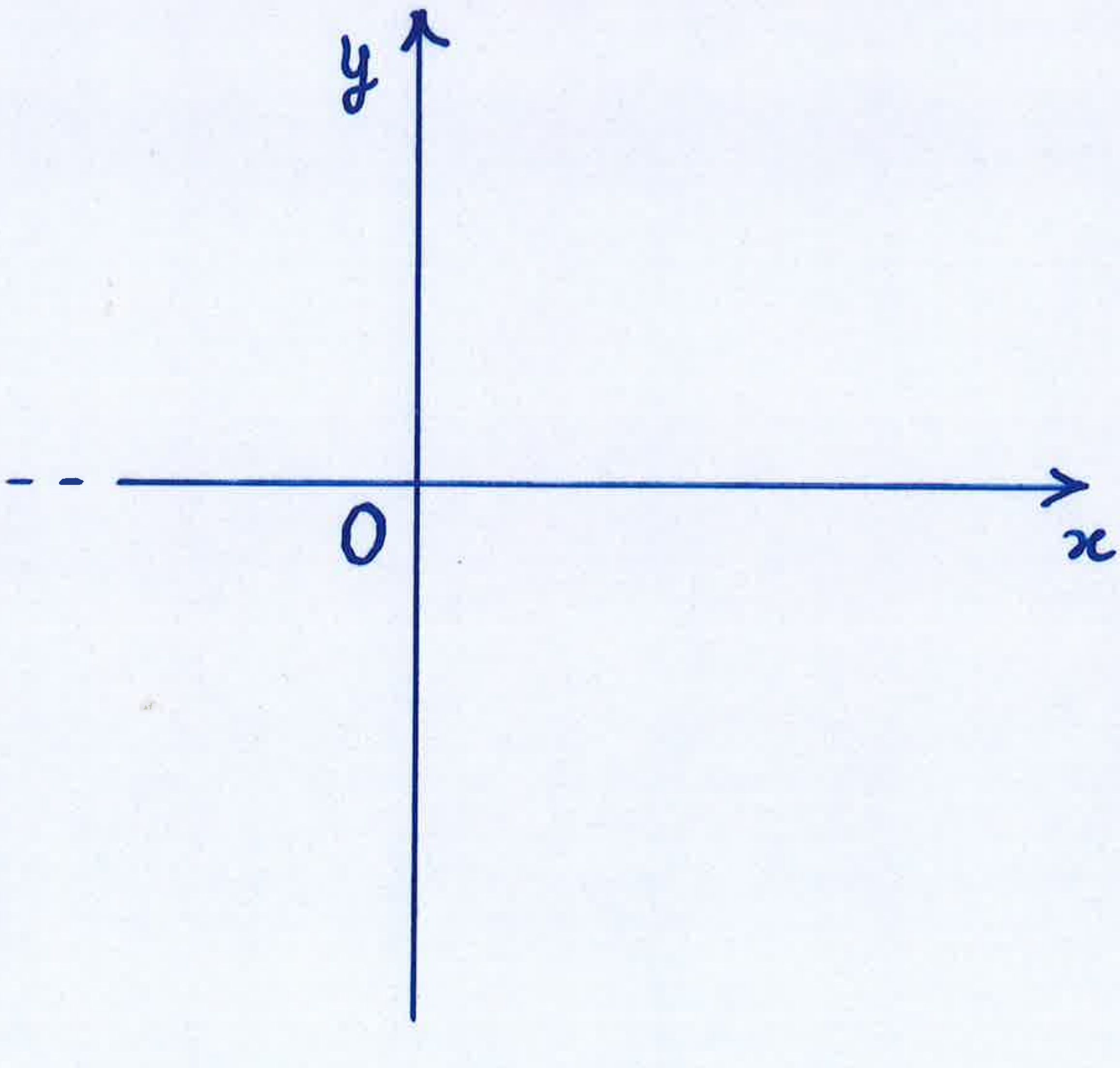


PIANO CARTESIANO

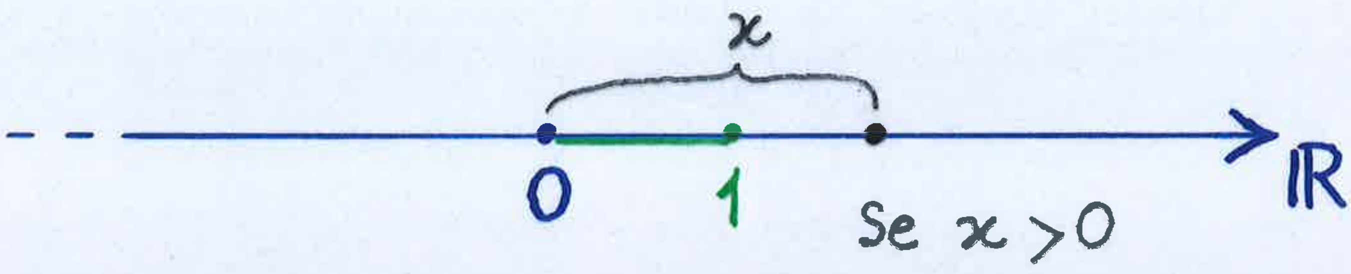


RETTA

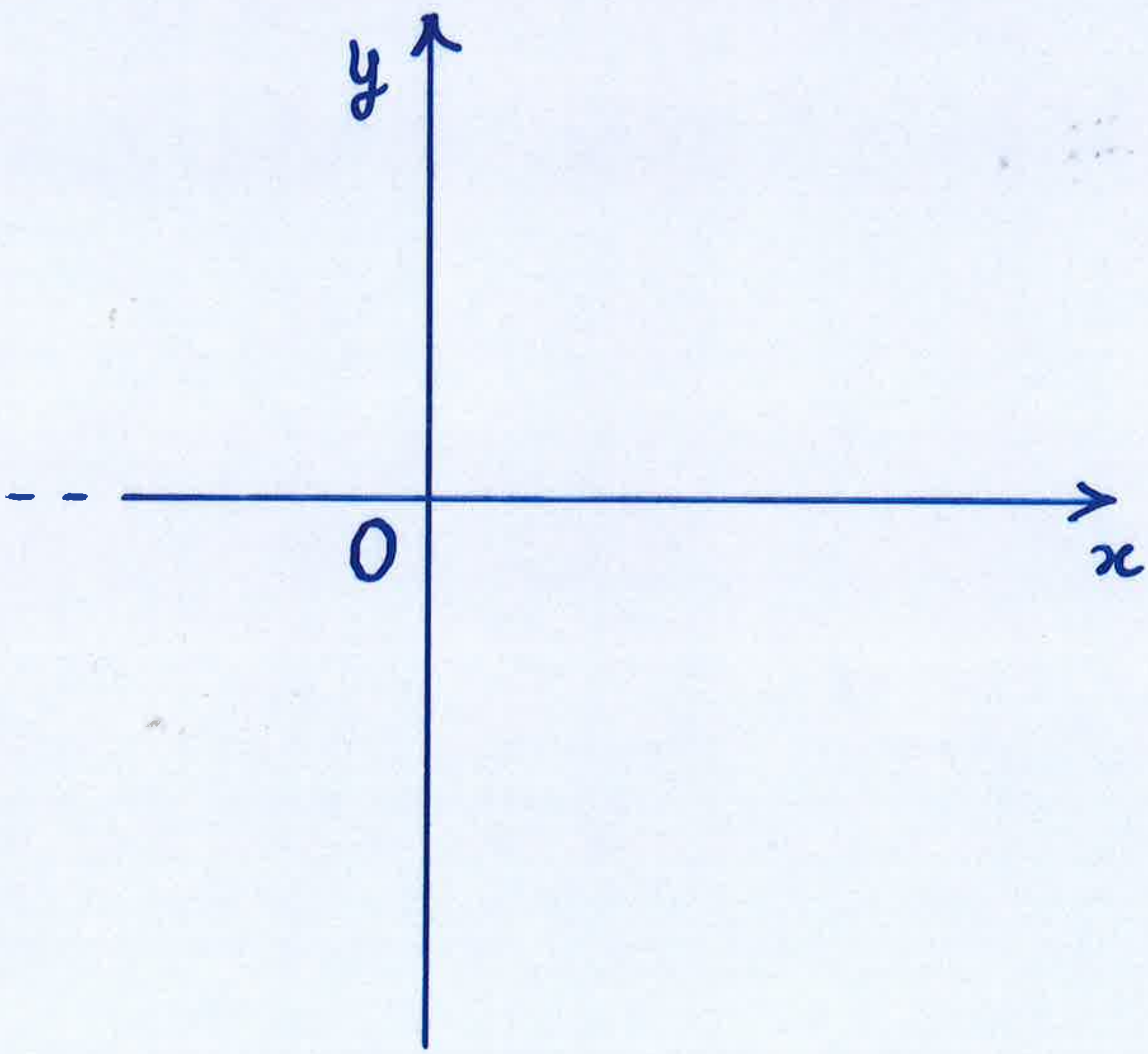
PIANO CARTESIANO



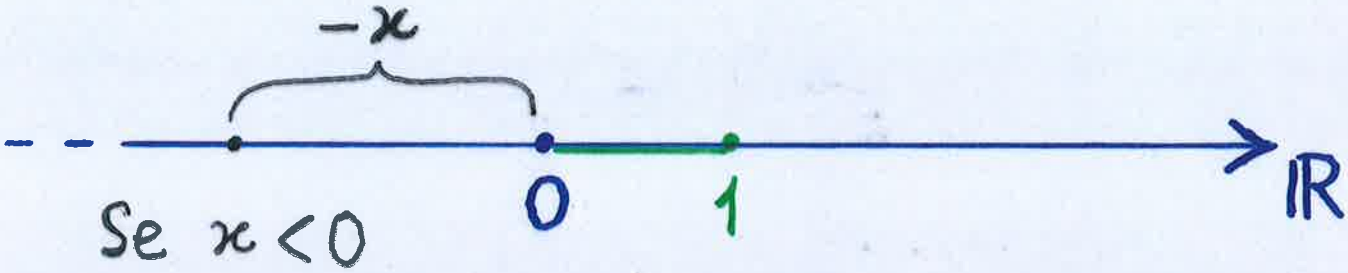
RETTA



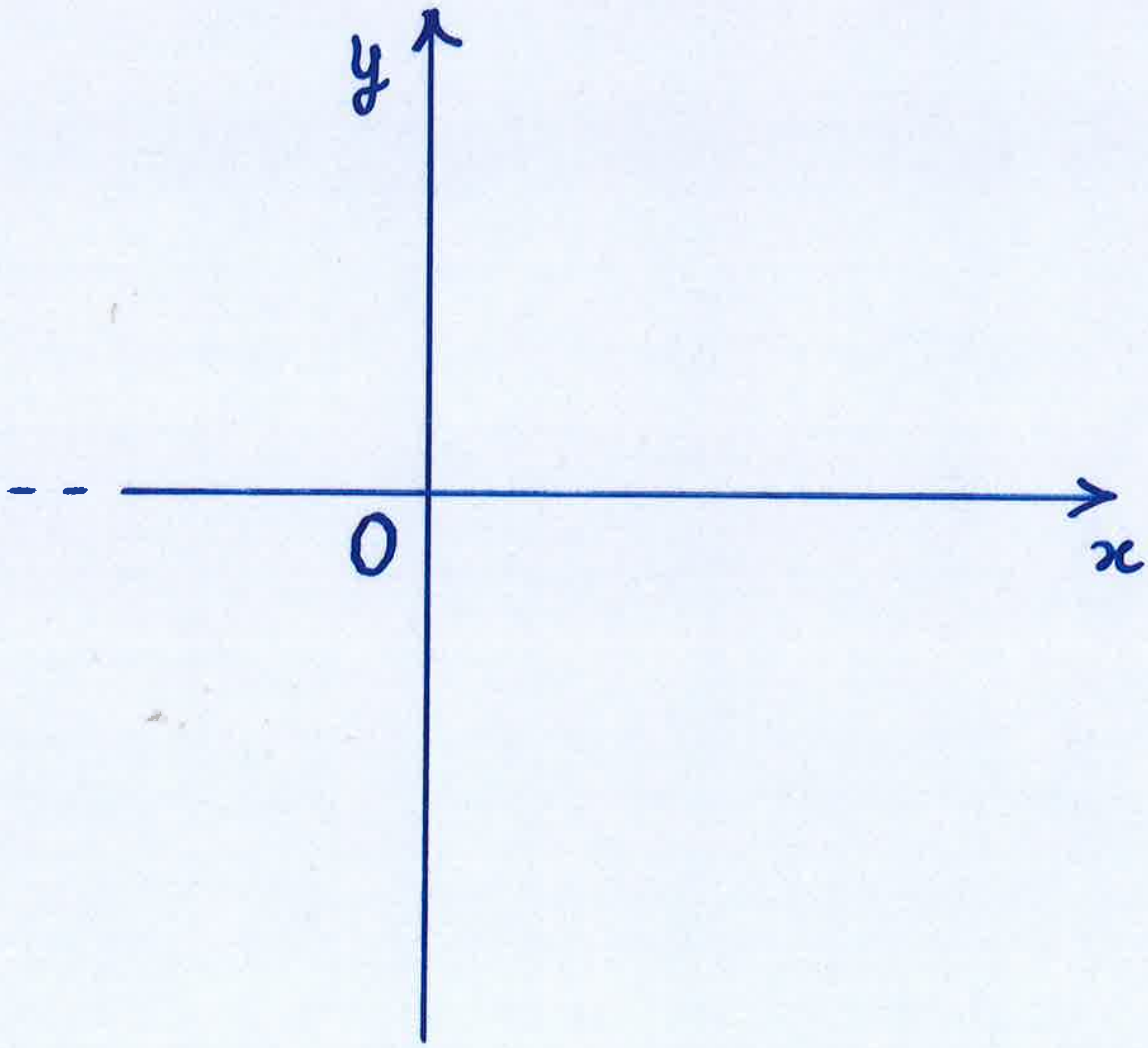
PIANO CARTESIANO



RETTA

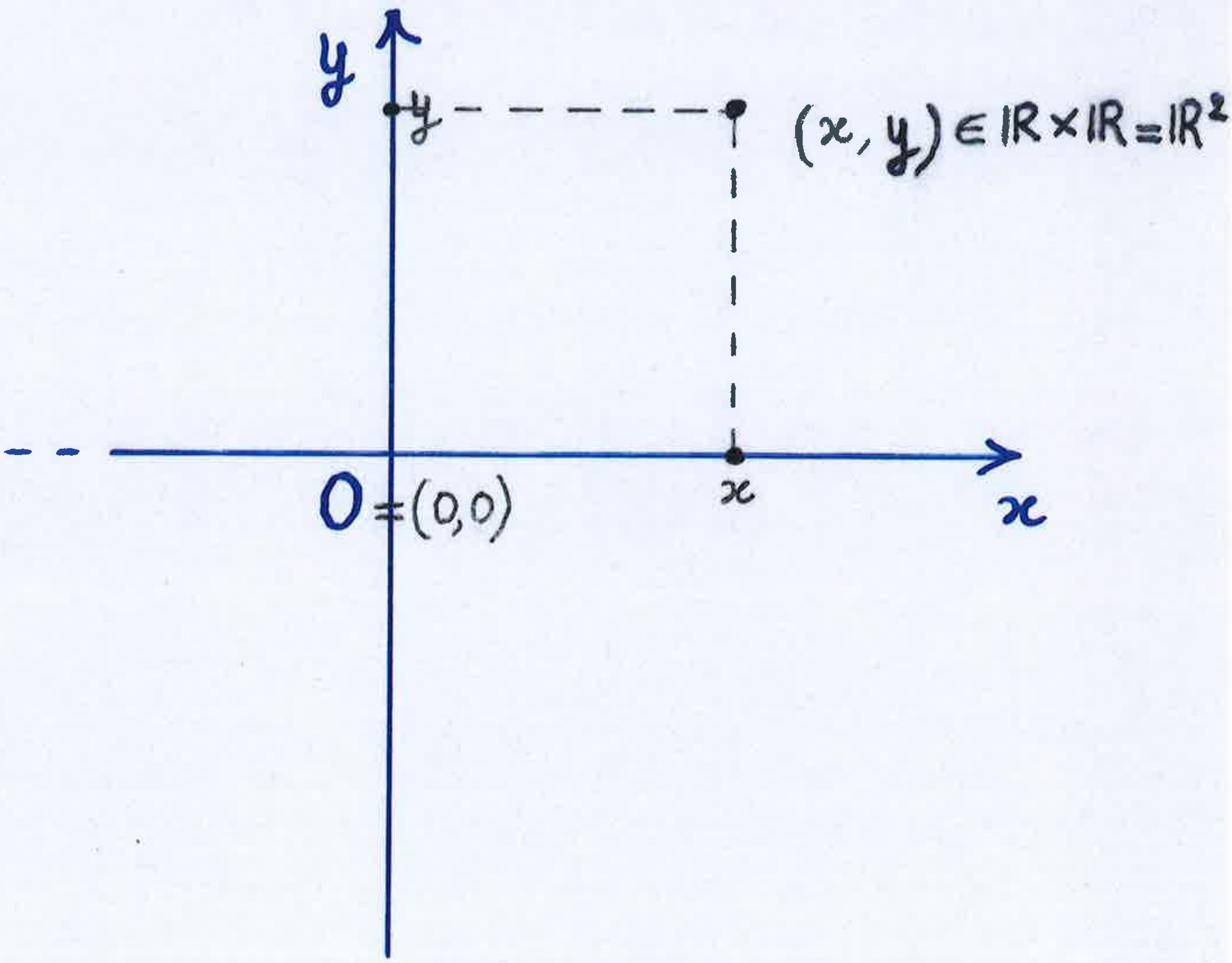


PIANO CARTESIANO



RETTA

PIANO CARTESIANO



INSIEMI PRODOTTO

Se A e B sono insiemi, il *prodotto (cartesiano)* $A \times B$ è definito da

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

Gli oggetti del tipo (a, b) vengono detti *coppie* (o "coppie ordinate"), ed hanno la proprietà che

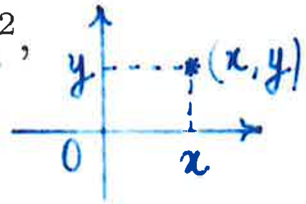
$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a' \text{ e } b = b')$$

$A = B$

$(a,b) \neq (b,a)$ per $a \neq b$!!

(a differenza dell'*insieme* $\{a, b\} = \{b, a\}$)

Scriveremo $A \times A = A^2$. È ben noto l'insieme $\mathbf{R}^2$, che si identifica con il "piano Cartesiano"



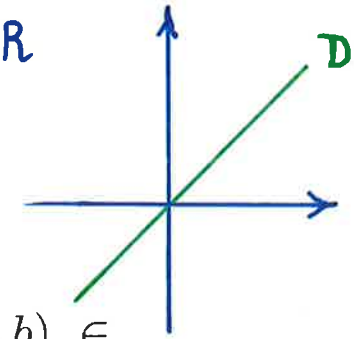
Gli insiemi prodotto permettono di definire alcuni importanti oggetti matematici.

Una "relazione" $\mathcal{R}$ di A in B è un qualsiasi sottoinsieme di $A \times B$ (se $A = B$ diremo che essa è una relazione in A). Diremo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ tramite $\mathcal{R}$ se $(a, b) \in \mathcal{R}$. A volte si scriverà $a \mathcal{R} b$.

nel linguaggio delle relazioni:

$a \mathcal{R} b$ significa: $(a, b) \in \mathcal{R}$

$A = \mathbb{R}$



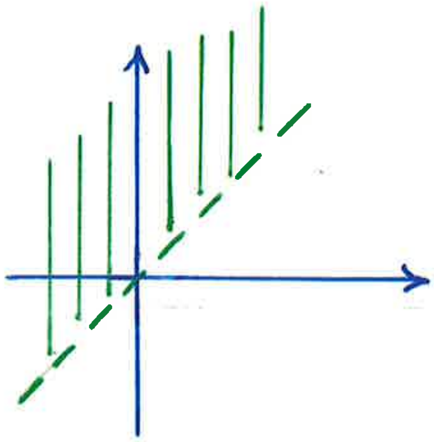
Esempi: il sottoinsieme

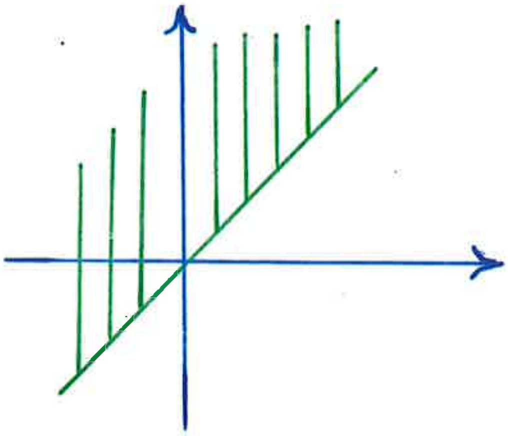
$$\mathcal{D} = \{(a, a) : a \in A\} \text{ (la “diagonale” di } A)$$

dà la relazione di *uguaglianza* in A. Infatti $(a, b) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow a = b$.

Le solite relazioni $<$ e $\leq$ tra numeri reali si identificano con gli insiemi

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x < y\}$ $\qquad$ $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \leq y\}$





Relazione d'ordine $\mathcal{R}$ in un insieme non vuoto A:

$$\forall x \in A \qquad x\mathcal{R}x \qquad \text{riflessività}$$ (D⊆R)

$$\forall x, y \in A \qquad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y \qquad \text{antisimmetria}$$

$$\forall x, y, z \in A \qquad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z \qquad \text{transitività}$$

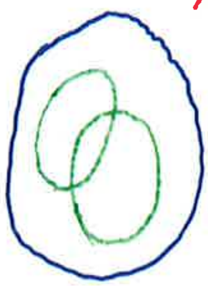
Se vale anche la proprietà

$$\forall x, y \in A \qquad x\mathcal{R}y \textit{ oppure } y\mathcal{R}x \qquad \text{dicotomia}$$

la relazione d'ordine si dice *totale* e A è detto insieme totalmente ordinato.

Esempi: $\leq$ su $\mathbf{R}$ è una relazione d'ordine totale. Alla relazione $<$ manca la riflessività. Esempio di relazione d'ordine non totale è $\subseteq$ per gli insiemi. (manca la dicotomia!)

Relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in un insieme non vuoto A:



$$\forall x \in A \qquad x\mathcal{R}x \qquad \text{riflessività}$$

$$\forall x, y \in A \qquad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x \qquad \text{simmetria}$$

$$\forall x, y, z \in A \qquad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z \qquad \text{transitività}$$

L'uguaglianza in $\mathbf{R}$ è un esempio di relazione di equivalenza. Infatti

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad x = x$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \qquad x = y \Longrightarrow y = x$$

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R} \qquad (x = y \text{ e } y = z) \Longrightarrow x = z.$$