Risolubilità delle equazioni algebriche in campo complesso

Es.1 (tema d'esame 10 gennaio 2013). Determinare le soluzioni dell'equazione algebrica

$$(z^3 + 2^3 i)(z^2 - 2iz) = 0\,.$$

È un'equazione algebrica di grado 5, dunque ammette 5 soluzioni (contando ciascuna soluzione con la sua *molteplicità*). Le soluzioni dell'equazione sono i valori di z che verificano almeno una delle equazioni:

$$(a)\quad z^3 + 2^3 i = 0\,, \qquad\qquad (b)\quad z^2 - 2iz = 0\,.$$

<u>Equazione (b)</u>: Si ha:

$$z^2 - 2iz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(z - 2i) = 0\,.$$

Dunque l'equazione ammette le soluzioni:

$$z_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad z_1 = 2i\,.$$

Equazione (a): Si ha:

$$z^3 + 2^3 i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = -2^3 i\,.$$

Dunque le soluzioni di (a) sono le *radici terze* del numero $w = -2^3 i = 2^3 e^{\frac{3\pi}{2} i}$, ovvero i numeri

$$w_k = 2e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} i}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

Si calcola esplicitamente:

$$w_0 = 2e^{\frac{\pi}{2} i} = 2i\,, \quad w_1 = 2e^{\frac{7\pi}{6} i} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)\,,$$

$$w_2 = 2e^{\frac{11\pi}{6} i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)\,.$$

Si noti che la soluzione $z_1 = 2i$ dell'equazione (a) coincide con la soluzione $w_0 = 2i$ dell'equazione (b), mentre tutti gli altri valori di z che verificano (a) oppure (b), z_0, w_2, w_3 sono tra loro distinti (e diversi da $2i$). Quindi le soluzioni dell'equazione sono date

dai valori

$$0, \quad 2\left(-\sqrt{3}/2 - 1/2i\right), \quad 2\left(\sqrt{3}/2 - 1/2i\right),$$

ciascuna di molteplicità uno;

$2i$, di molteplicità due.

Si noti che la somma delle molteplicità (1+1+1+2) eguaglia il grado dell'equazione.

Es.2 (tema d'esame 28 giugno 2013). Si determini il numero delle soluzioni di parte reale strettamente positiva dell'equazione

$$(z^2 - 49i)(z^4 - 7) = 0\,.$$

È un'equazione algebrica di grado 6, dunque ammette 6 soluzioni (contando ciascuna soluzione con la sua *molteplicità*). Le soluzioni dell'equazione sono i valori di z che verificano almeno una delle equazioni:

$$(a)\quad z^2 - 49i = 0\,, \qquad\qquad (b)\quad z^4 - 7 = 0\,.$$

<u>Equazione (a)</u>: Si ha:

$$z^2 - 49i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 49i\,.$$

Dunque le soluzioni di (a) sono le *radici quadrate* del numero $w = 49i = 49e^{\frac{\pi}{2}i}$, ovvero i numeri

$$w_k = 7e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}i}\,, \qquad k = 0, 1\,.$$

Si calcola esplicitamente:

$$w_0 = 7e^{\frac{\pi}{4}i} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) ,$$
$$w_1 = 7e^{\frac{5\pi}{4}i} = -7\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) .$$

<u>Equazione (b)</u>: Si ha:

$$z^4 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = 7\,.$$

Dunque le soluzioni di (b) sono le *radici quarte* del numero $v = 7 = 7e^{0i}$, ovvero i numeri

$$v_k = \sqrt[4]{7}\, e^{\frac{2k\pi}{4}i}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Si calcola esplicitamente:

$$v_0 = \sqrt[4]{7}e^{0i} = \sqrt[4]{7}\,, \quad v_1 = \sqrt[4]{7}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{7}i\,,$$
$$v_2 = \sqrt[4]{7}e^{\pi i} = -\sqrt[4]{7}\,, \quad v_2 = \sqrt[4]{7}e^{\frac{3\pi}{2}i} = -\sqrt[4]{7}i\,.$$

Osservazione 1. In alternativa, per risolvere l'equazione (b) si può osservare che

$$z^4 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 - \sqrt{7})(z^2 + \sqrt{7}) = 0\,,$$

dunque le soluzioni di (b) sono le radici quadrate di ciascuno dei numeri $\pm\sqrt{7}$.

Riassumendo, le soluzioni dell'equazione sono date dai valori

$$\pm 7\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\,, \quad \pm\sqrt[4]{7}\,, \quad \pm\sqrt[4]{7}i\,.$$

Dunque le soluzioni di parte reale strettamente positiva sono due: $7\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ e $\sqrt[4]{7}$.

Osservazione 2. Per determinare il numero di soluzioni dell'equazione con parte reale strettamente positiva, non è necessario determinare esplicitamente tutte le soluzioni dell'equazione.

A questo scopo, è utile premettere le seguenti considerazioni sulle radici quadrate di un numero complesso.

1. Le radici quadrate di qualsiasi numero complesso w diverso da zero sono una coppia di numeri complessi opposti;

2. Se w è un numero reale strettamente positivo, le sue radici quadrate sono i due numeri reali $\pm\sqrt{w}$;

3. Se w è un numero reale strettamente negativo, le sue radici quadrate sono i due numeri immaginari puri $\pm\sqrt{-w}\,i$;

4. Se w è un numero complesso non reale (cioè di parte immaginaria diversa da zero) le sue radici quadrate sono sempre due numeri complessi (opposti) di parte reale diversa da zero (uno di parte reale strettamente negativa e uno di parte reale strettamente positiva).

Come già osservato, si ha

$$(z^2 - 49i)(z^4 - 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (z^2 - 49i)(z^2 - \sqrt{7})(z^2 + \sqrt{7}) = 0\,,$$

dunque le soluzioni dell'equazione sono:

(i) le radici quadrate di $\sqrt{7}$: sono i numeri reali $\pm\sqrt{\sqrt{7}} = \pm\sqrt[4]{7}$ (uno strettamente positivo e uno strettamente negativo);

(ii) le radici quadrate di $-\sqrt{7}$: sono i numeri immaginari puri $\pm\sqrt{\sqrt{7}}i = \pm\sqrt[4]{7}i$ (entrambi di parte reale nulla);

(iii) le radici quadrate di $49\,i$: sono due numeri complessi opposti, uno di parte reale strettamente positiva e uno di parte reale strettamente negativa.

Si ritrova che l'equazione ha due soluzioni di parte reale strettamente positiva.

Es.3 (tema d'esame 12 giugno 2012). Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - 6z^3 + 9 = 0\,. \tag{1}$$

Ponendo $t = z^3$, l'equazione di riduce a

$$t^2 - 6t + 9 = 0\,. \tag{2}$$

Le soluzioni dell'equazione in z sono tutti e soli i valori di z per cui $t = z^3$ risolve la precedente equazione (2); si ha

$$t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2\,,$$

per cui (2) ha come unica soluzione

$$t = 3\,, \quad \text{di molteplicità } 2\,.$$

Allora le soluzioni dell'equazione (1) sono le radici terze di $3 = 3e^{0i}$, cioè i valori

$$z_k = \sqrt[3]{3}\, e^{\frac{2k\pi}{3}\, i}\,, \quad k = 0, 1, 2\,,$$

ciascuna di molteplicità 2 (**calcolare esplicitamente i valori** z_0**,** z_1**,** z_2).

Es.4 (tema d'esame 20 aprile 2011). Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$(z^3 - i)(z^2 - z - 7iz + 7i) = 0\,. \tag{3}$$

Le soluzioni dell'equazione sono i valori di z che verificano almeno una delle equazioni:

$$(a)\quad z^3 - i = 0\,, \qquad (b)\quad z^2 - z - 7iz + 7i = 0\,.$$

<u>Equazione (a)</u>: Si ha:

$$z^3 - i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = i\,.$$

Le soluzioni di (a) sono le *radici terze* di $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$:

$$w_k = e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

Si calcola esplicitamente:

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,,\ \ w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,,\ \ w_2 = -i\,.$$

Equazione (b): Si calcola

$$z^2 - z - 7iz + 7i = z(z-7i) - (z-7i) = (z-7i)(z-1)\,,$$

e dunque:

$$z^2 - z - 7iz + 7i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-7i)(z-1) = 0\,,$$

quindi le soluzioni di (b) sono:

$$z_0 = 7i\,, \quad z_1 = 1\,.$$

Le soluzioni dell'equazione (3) sono i valori (distinti) w_0, w_1, w_2, z_0, z_1.

Es.5. Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - iz^2 + z - i = 0\,. \tag{4}$$

Si calcola

$$\begin{aligned} z^3 - iz^2 + z - i &= z^2(z-i) + (z-i) \\ &= (z-i)(z^2+1) = (z-i)(z-i)(z+i) \\ &= (z-i)^2(z+i)\,, \end{aligned}$$

dunque la soluzioni sono

$$i \text{ (di molteplicità 2)} \quad \text{e} \quad -i \text{ (di molteplicità 1)}\,.$$