Calcolo di radici di numeri complessi

Es.1 (tema d'esame 15 aprile 2014). Determinare le radici quarte del numero complesso

$$z = \frac{\sqrt{3}\,i - 1}{|1+i|^2}\left[\mathrm{Re}(e^{4\pi i}) + \mathrm{Im}\left(\frac{3i-2}{i}\right)\right].$$

Scriviamo z in *forma esponenziale* (o *trigonometrica*). Si calcola:

$$e^{4\pi i} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \mathrm{Re}(e^{4\pi i}) = 1\,,$$

$$\frac{3i-2}{i} = 3 - \frac{2}{i} = 3 + 2i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{3i-2}{i}\right) = 2\,,$$

$$|1+i|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}\,i-1}{|1+i|^2} = \frac{\sqrt{3}\,i-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,i - \frac{1}{2}\,,$$

quindi:

$$z = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)i\right)$$
$$= 3\,e^{\frac{2\pi}{3}\,i}\,.$$

Quindi le radici quarte di z sono

$$w_k = \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\, i}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

cioè

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{2\pi}{12}\, i} = \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{\pi}{6}\, i} \\
&= \sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) i\right) = \sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)\,, \\
w_1 &= \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{8\pi}{12}\, i} = \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{2\pi}{3}\, i} \\
&= \sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) i\right) = \sqrt[4]{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)\,, \\
w_2 &= \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{14\pi}{12}\, i} = \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{7\pi}{6}\, i} \\
&= \sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) i\right) = \sqrt[4]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i\right)\,, \\
w_3 &= \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{20\pi}{12}\, i} = \sqrt[4]{3}\, e^{\frac{5\pi}{3}\, i} \\
&= \sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) i\right) = \sqrt[4]{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)\,.
\end{aligned}$$

Es.2 (tema d'esame 4 settembre 2014). Determinare la radice terza del numero complesso

$$w = 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)}}{7^3\, i}\right)$$

appartenente al secondo quadrante.

Si calcola:

$$7^3\, i = 7^3 e^{\frac{\pi}{2}i}\,, \qquad e^{\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)i} = e^{\frac{\pi}{6}i}\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)i}}{7^3\, i} &= \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{7^3 e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{1}{7^3} e^{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)i} = \frac{1}{7^3} e^{-\frac{\pi}{3}i} \\
&= \frac{1}{7^3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) i\right) \\
&= \frac{1}{7^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$w = 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{7^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right) = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{7^3} e^{0i}\,.$$

Le radici terze di w sono i numeri

$$w_k = \frac{1}{7} e^{\frac{2k\pi}{3} i}, \quad k = 0, 1, 2,$$

cioè

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{7}\, e^{0\, i} = \frac{1}{7}, \\
w_1 &= \frac{1}{7}\, e^{\frac{2\pi}{3}\, i} = \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right), \\
w_2 &= \frac{1}{7}\, e^{\frac{4\pi}{3}\, i} = \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right).
\end{aligned}$$

La radice terza appartenente al secondo quadrante (cioè di parte reale negativa e parte immaginaria positiva) è w_1.

Es.3 (tema d'esame 9 giugno 2014). Determinare le radici cubiche del numero complesso

$$w = \frac{4e^{\frac{5\pi}{6}i}}{1+\sqrt{3}\,i}\,.$$

Scriviamo la *forma esponenziale* del numero complesso $z = 1+\sqrt{3}\,i$. Abbiamo:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2\,;$$

θ è un argomento di z se soddisfa le equazioni

$$2\cos\theta = 1 \qquad \text{e} \qquad 2\sin\theta = \sqrt{3}\,;$$

un valore ammissibile è $\theta = \frac{\pi}{3}$. Dunque la forma esponenziale di z è

$$z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}\,.$$

Dunque:

$$w = \frac{4e^{\frac{5\pi}{6}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2e^{\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i}(=2i)\,.$$

Le radici cubiche di w sono date da

$$w_k = \sqrt[3]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} i}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

cioè

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{6} i} = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) i \right) \\
&= \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right), \\
w_1 &= \sqrt[3]{2} e^{\frac{5\pi}{6} i} = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) i \right) \\
&= \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right), \\
w_2 &= \sqrt[3]{2} e^{\frac{3\pi}{2} i} = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) i \right) \\
&= -\sqrt[3]{2} i .
\end{aligned}$$