Rappresentazione nel piano di Gauss di insiemi di numeri complessi

Es.1 (tema d'esame 2 settembre 2013). Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme

$$I = \{z \in \mathbb{C} : \ (z^2 + |z|^2)\mathrm{Im}((1-2i)z) = 0\}\,.$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto

$$\begin{aligned} &(z^2 + |z|^2)\mathrm{Im}((1-2i)z) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & z^2 + |z|^2 = 0 \quad \text{o} \quad \mathrm{Im}((1-2i)z) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $I = A \cup B$, dove:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} : \ z^2 + |z|^2 = 0\}\,, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}((1-2i)z) = 0\} \end{aligned}$$

<u>Insieme A</u>: $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^2 + |z|^2 = 0\}$. Per $z = x + iy$

$$\begin{aligned} z^2 + |z|^2 &= (x+iy)^2 + x^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2ixy + (iy)^2 + x^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2ixy\,. \end{aligned}$$

Quindi $z^2 + |z|^2 = 0$ se e solo se:

$$\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ e } \ \forall\, y \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ x = 0\}\,.$$

<u>Insieme B</u>: $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}((1-2i)z) = 0\}$. Per $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}(1-2i)z &= (1-2i)(x+iy) \\ &= x + iy - 2ix - 2i^2 y = x + iy - 2ix + 2y \\ &= (x+2y) + i(y-2x)\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\mathrm{Im}((1-2i)z) = y - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x\,.$$

Quindi

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ y = 2x\}\,.$$

Dunque l'insieme

$$I = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ x = 0 \ \text{ oppure } \ y = 2x\}$$

è rappresentato dall'unione delle rette di equazione $x = 0$ e $y = 2x$.

Es.2 (tema d'esame 27 marzo 2013). Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme

$$I = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ 2(\overline{z}^2 + |z|^2) + 3iz \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \right\} .$$

Per $z = x + iy$, si ha $\overline{z} = x - iy$, quindi si calcola:

$$\begin{aligned}
&\overline{z}^2 + |z|^2 = (x - iy)^2 + x^2 + y^2 \\
&= x^2 - 2ixy + (iy)^2 + x^2 + y^2 \\
&= x^2 - 2ixy - y^2 + x^2 + y^2 \\
&= 2x^2 - 2ixy \, ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(\overline{z}^2 + |z|^2) + 3iz \\
&= 2(2x^2 - 2ixy) + 3i(x + iy) \\
&= 4x^2 - 4ixy + 3ix - 3y \\
&= (4x^2 - 3y) + (3x - 4xy)i \, ,
\end{aligned}$$

Il numero complesso

$$2(\overline{z}^2 + |z|^2) + 3iz = (4x^2 - 3y) + (3x - 4xy)i$$

appartiene ad $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se e solo se la sua parte immaginaria è nulla e la sua parte reale è maggiore o uguale a zero, quindi se e solo se

$$\begin{cases} 4x^2 - 3y \geq 0 & (1)\,, \\ 3x - 4xy = 0 & (2)\,. \end{cases}$$

<u>Condizione (2)</u>:

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x(3 - 4y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ o } y = \frac{3}{4}\,.$$

<u>Condizione (1)</u>:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad y \leq \frac{4}{3}x^2$$

(1) e (2) sono verificate contemporaneamente se e solo se:

$$\left(x = 0 \ \text{ o } \ y = \frac{3}{4} \right) \ \text{ e } \ y \leq \frac{4}{3}x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \ \text{ e } \ y \leq \frac{4}{3}x^2 \right) \ \text{ o } \ \left(y = \frac{3}{4} \ \text{ e } \ y \leq \frac{4}{3}x^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\, x = 0 \ \text{ e } \ y \leq 0 \,) \ \text{ o } \ \left(y = \frac{3}{4} \ \text{ e } \ \frac{9}{16} \leq x^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\, x = 0 \ \text{ e } \ y \leq 0 \,) \ \text{ o } \ \left(y = \frac{3}{4} \ \text{ e } \ x \leq -\frac{3}{4} \right)$$

$$\text{o } \ \left(y = \frac{3}{4} \ \text{ e } \ x \geq \frac{3}{4} \right)$$

Dunque l'insieme I si rappresenta nel piano di Gauss come l'unione delle semirette:

$$r: \quad x = 0 \ \text{ e } \ y \leq 0\,,$$

$$s: \quad x \leq -\frac{3}{4} \ \text{ e } \ y = \frac{3}{4}\,,$$

$$t: \quad x \geq \frac{3}{4} \ \text{ e } \ y = \frac{3}{4}\,.$$

Es.3 (tema d'esame 25 giugno 2014). Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme

$$I = \left\{ z \in \mathbb{C} : \; 2(z^2 - \overline{z}^2)i - |z|^2 \frac{4}{i} = \sqrt{2}\, |8i|\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, \overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} \right\} .$$

Scriviamo in *forma algebrica* il numero complesso a secondo membro della relazione precedente:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\,,$$
$$\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \overline{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\, |8i|\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, \overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 8\sqrt{2}\, i\, (\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 8 + 8i$$

Sviluppiamo il primo membro: per $z = x + iy$

$$2(z^2 - \overline{z}^2)i - |z|^2 \frac{4}{i} = 2(z - \overline{z})(z + \overline{z})i + 4i|z|^2$$
$$= 2(x + iy - x + iy)(x + iy + x - iy)i + 4i(x^2 + y^2)$$
$$= 2\, 2iy\, 2x\, i + 4i(x^2 + y^2) = -8xy + 4i(x^2 + y^2)$$

Quindi la relazione

$$2(z^2 - \overline{z}^2)i - |z|^2 \frac{4}{i} = \sqrt{2}\,|8i|\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, \overline{e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

si riduce a

$$-8xy + 4i(x^2 + y^2) = 8 + 8i\,.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie dei due valori complessi a primo e secondo membro abbiamo che:

$$z = x + iy \in I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -8xy = 8 \\ 4(x^2 + y^2) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy = -1 \quad \text{(iperbole)} \\ x^2 + y^2 = 2 \quad \text{(circonferenza)}\,. \end{cases}$$

L'insieme I è rappresentato dall'intersezione di un'iperbole e di una circonferenza del piano.