ELEMENTI DI LOGICA

Predicati: frasi sensate che contengono una (o più) *variabili libere*. Li indichiamo con $\mathcal{P}(x, y, \dots)$,...

Le variabili libere $x, y, \dots$ sono argomenti che possono assumere valori diversi in certi insiemi.

Esempi
1. $\mathcal{P}(x) =$"L'intero x è un numero primo"
2. $\mathcal{Q}(x, y) =$"Il numero x è maggiore di y"

I predicati NON hanno un valore di verità intrinseco: quest'ultimo dipende dai valori attribuiti alle variabili libere. Con riferimento agli esempi 1 e 2 abbiamo:

$\mathcal{P}(2)\ \ V\,, \qquad \mathcal{P}(4)\ \ F$

$\mathcal{Q}(3, \frac{7}{2})\ \ F\,, \qquad \mathcal{Q}(2, \frac{1}{5})\ \ V$

Quantificatori: specificazioni quantitative attribuite alle variabili libere in un predicato.

TIPI DI QUANTIFICATORI

Quantificatore universale
$\forall$: "PER OGNI..." ("PER TUTTI...")

Quantificatore esistenziale
$\exists$: "ESISTE (ALMENO UN)...TALE CHE..."

$\exists!$: "ESISTE UN UNICO...TALE CHE..."

Esempio: "Esiste un numero intero più grande di ogni intero"

Formalizzazione:
1. $\exists\ y\ :\ \forall\ x\,,\ y \geq x\,.$
(trasposizione corretta, ma la proposizione è falsa)
2. $\forall\ x\ \exists\ y\ :\ y \geq x\,.$ (trasposizione errata, ma la proposizione è vera!)
N.B. È importante la posizione dei quantificatori all'interno di una frase!!

Operazioni logiche sulle proposizioni. Qualche esempio

$\mathcal{P}$: "3 è un numero pari" FALSA
$\mathcal{Q}$: "4 non è un numero primo" VERA

• $\mathrm{non}\,\mathcal{P}$: "$3$ **non** è un numero pari" VERA

• $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$: "$3$ è un numero pari **e** 4 non è un numero primo" FALSA

• $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$: "$3$ è un numero pari **oppure** 4 non è un numero primo" VERA

• $\mathrm{non}\,(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$: "$3$ **non** è un numero pari **oppure** 4 **è** un numero primo"$=(\mathrm{non}\,\mathcal{P}) \vee (\mathrm{non}\,\mathcal{Q})$ VERA

• $\mathrm{non}\,(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$: "$3$ **non** è un numero pari **e** 4 **è** un numero primo"$= (\mathrm{non}\,\mathcal{P}) \wedge (\mathrm{non}\,\mathcal{Q})$ FALSA

IMPLICAZIONE. Un esempio banale

$\mathcal{P}$: "Fido è un cane"

$\mathcal{Q}$: "Fido è un mammifero"

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: "**Se** Fido è un cane **allora** è un mammifero"

Terminologia associata all'uso dell'implicazione

• $\mathcal{P}$ è condizione SUFFICIENTE per $\mathcal{Q}$: l'essere un cane <u>basta</u> per essere un mammifero.

• $\mathcal{Q}$ è condizione NECESSARIA per $\mathcal{P}$: l'essere mammifero è un requisito <u>indispensabile</u> per essere cane, ovvero **se** Fido non è un mammifero **allora** non può essere un cane. Quindi:

$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{non}\, \mathcal{Q} \Rightarrow \mathrm{non}\, \mathcal{P}]$

Un esempio matematico

Data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

• La derivabilità in x_0 è condizione SUFFICIENTE per la continuità in x_0

• La continuità in x_0 è condizione NECESSARIA per la derivabilità in x_0 (ovvero se f NON è continua in x_0 allora f NON è derivabile in x_0).

• **Negare** $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ significa negare che $\mathcal{Q}$ sia indispensabile per la validità di $\mathcal{P}$, ovvero significa affermare che $\mathcal{P}$ può valere (essere vera) quando non vale $\mathcal{Q}$, cioè:
$[\text{non}\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{P} \wedge (\text{non}\,\mathcal{Q})]$

• In generale:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \qquad \text{è DIVERSO da} \qquad \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$$

DOPPIA IMPLICAZIONE (O BIIMPLICAZIONE)

$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ significa: $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \;\wedge\; \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ e si legge:

"$\mathcal{P}$ ($\mathcal{Q}$) è condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE per $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}$)"

Esempio:
$\mathcal{P}$: "Il triangolo T ha due lati uguali"
$\mathcal{Q}$: "Il triangolo T ha due angoli uguali"

Forma tipica dell'enunciato di un Teorema

$$\underset{\textbf{Ipotesi}}{\mathcal{P}} \Rightarrow \underset{\textbf{Tesi}}{\mathcal{Q}}$$

L'equivalenza

$$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \mathrm{non}\,\mathcal{P}]$$

viene utilizzata nella

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO. PRIMA FORMA

È noto che l'Ipotesi $\mathcal{P}$ è vera e si vuole provare la veridicità dell'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e, quindi, della Tesi $\mathcal{Q}$; ma, da quanto predetto, ciò equivale a verificare che se non si avvera $\mathcal{Q}$ allora non può avverarsi $\mathcal{P}$. Dunque si prova che

$$\mathrm{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \mathrm{non}\,\mathcal{P}\,.$$

Si parte cioè dalla negazione della Tesi $\mathcal{Q}$ e si dimostra che, da ciò, discende la negazione dell'Ipotesi $\mathcal{P}$. Ma questo è **ASSURDO**, perchè l'ipotesi $\mathcal{P}$ è un fatto vero! Dunque anche la Tesi $\mathcal{Q}$ deve essere vera.

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO. SECONDA FORMA

È noto che l'Ipotesi $\mathcal{P}$ è vera e si vuole provare la veridicità dell'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (quindi della Tesi Q). Si parte ancora dalla negazione di $\mathcal{Q}$ e, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, si perviene a dimostrare la veridicità di una terza proposizione $\mathcal{R}$ che, a priori, è già noto essere FALSA (da cui l'**ASSURDO**).