LIMITI DI FUNZIONE IN FORMA DI POTENZA E FORME INDETERMINATE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A, $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) > 0$ per $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$ (essendo I un intorno di x_0). Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in [0, +\infty] \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L' \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Allora:

1. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = L^{L'}\,, \quad$ se $L \in]0, +\infty[\,,\ L' \in \mathbb{R}\,,$

2. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty\,, \quad$ se $\begin{cases} L \in]1, +\infty[\,,\ L' = +\infty\,, \\ L = +\infty\,,\ L' \in]0, +\infty]\,, \\ L \in]0, 1[\,,\ L' = -\infty\,, \\ L = 0\,,\ L' \in [-\infty, 0[\,, \end{cases}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0\,, \quad$ se $\begin{cases} L \in]1, +\infty[\,,\ L' = -\infty\,, \\ L = +\infty\,,\ L' \in [-\infty, 0[\,, \\ L \in]0, 1[\,,\ L' = +\infty\,, \\ L = 0\,,\ L' \in]0, +\infty]\,. \end{cases}$

La verifica delle relazioni di limite precedente si basa su:

1. L'identità $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ ($f(x) > 0$, per $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, con I intorno di x_0);

2. Le proprietà seguenti:

a. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in [0, +\infty]$ (per $L = 0$, $f(x) > 0$, per $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, con I intorno di x_0)

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \log(f(x)) = \begin{cases} \log L\,, & \text{se } L \in]0, +\infty[\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ -\infty\,, & \text{se } L = 0\,. \end{cases}$$

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = \begin{cases} e^L\,, & \text{se } L \in \mathbb{R}\,, \\ +\infty\,, & \text{se } L = +\infty\,, \\ 0\,, & \text{se } L = -\infty\,. \end{cases}$$

Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ presenta:

1. La forma indeterminata 0^0, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$;

2. La forma indeterminata $+\infty^0$, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$;

3. La forma indeterminata $1^{\pm\infty}$, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.