PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LIMITI DI FUNZIONE

Teorema (CALCOLO DEI LIMITI).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L' .$$

Se non si hanno forme indeterminate, allora:

(1) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = L \pm L'$;

(2) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot L'$;

(3) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{L'}$.

Teorema (CONFRONTO).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L' \,.$$

Supponiamo inoltre che esista un intorno J di x_0 tale che

$$f(x) \leq g(x) \,, \qquad \forall\, x \in J \cap A \setminus \{x_0\} \,.$$

Allora $L \leq L'$.

Teorema (DEI DUE CARABINIERI).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L\,.$$

Sia $h : A \to \mathbb{R}$ una terza funzione, per cui esiste un intorno J di x_0 tale che:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)\,, \qquad \forall\, x \in J \cap A \setminus \{x_0\}\,.$$

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.