Formula di integrazione per sostituzione per integrali indefiniti

$f \in C^0(I)$, $\varphi \in C^1(J)$, $\varphi : J \to I$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli:

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt\,, \quad (x = \varphi(t))$$

Esempio 1. *Calcolare*

$$\int \arctan^3(t)\, \frac{1}{1+t^2}\, dt\,.$$

Si osserva che $\dfrac{d}{dt}(\arctan(t)) = \dfrac{1}{1+t^2}$; quindi, posto $\varphi(t) = \arctan(t)$, l'integrale da calcolare risulta della forma $\displaystyle\int (\varphi(t))^3\varphi'(t)\, dt$. Ponendo $x = \varphi(t)$ $\left(dx = \varphi'(t)\, dt = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt\right)$ si calcola

$$\int \arctan^3(t)\, \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\arctan^4(t)}{4} + c\,.$$

Esempio 2. *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$

Si osserva che $\displaystyle\frac{d}{dx}(1+e^x) = e^x$. Quindi l'integrale è della forma $\displaystyle\int \frac{1}{\varphi(x)}\,\varphi'(x)\,dx$, con $\varphi(x) = 1+e^x$. Ponendo $y = \varphi(x) = 1+e^x$ ($dy = \varphi'(x)\,dx = e^x\,dx$) con la formula di integrazione per sostituzione si calcola:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| + c = \log(1+e^x) + c\,.$$