Integrali impropri fondamentali

1) Studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx \tag{1}$$

dove $a > 0$ è un numero assegnato e α è un arbitrario numero reale.
Notiamo, anzitutto, che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ è localmente integrabile in $]0, a]$.
Per definizione,

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

Per $c \in \mathbb{R}$ fissato, tale che $0 < c < a$, dobbiamo calcolare

$$\int_c^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx \,.$$

Distinguiamo due casi

Caso 1: $\alpha \neq 1$

Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ è la funzione $F(x) = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. Allora:

$$\int_c^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^a = \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

Caso 2: $\alpha = 1$

Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $F(x) = \log|x|$. Allora:

$$\int_c^a \frac{1}{x}\,dx = [\log|x|]_c^a$$

$$= \log|a| - \log|c| = \log(a) - \log(c) \quad (a, c > 0)$$

Per quanto riguarda il carattere dell'integrale improprio, calcoliamo

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{c\to 0^+}\left[\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] = \begin{cases} \dfrac{a^{-\alpha+1}}{1-\alpha} & \text{per}\,\alpha<1 \\ \\ +\infty & \text{per}\,\alpha>1 \end{cases} \\ \\ \displaystyle\lim_{c\to 0^+} \log(a) - \log(c) = +\infty\,, \ \text{per}\,\alpha = 1 \end{cases}$$

2) Le considerazioni sviluppate nel punto 1) si possono applicare anche allo studio degli integrali impropri del tipo

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx\,, \quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx\,, \qquad (2)$$

in cui $a, b \in \mathbb{R}$ sono numeri assegnati, con $a < b$, e, come in 1), α varia in $\mathbb{R}$. Il carattere di questi integrali si studia riconducendosi alla tipologia di integrale considerato al punto 1). Illustriamo il metodo nel caso della prima tipologia di integrale considerata in (2). Per definizione, si ha

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx\,.$$

Per $c \in \mathbb{R}$ fissato, con $a < c < b$, effettuando nell'integrale

$$\int_c^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$$

il cambio di variabile $y = x - a$, per cui

$$\begin{aligned} &dy = dx\,,\\ &x = c \;\to\; y = c-a\,,\\ &x = b \;\to\; y = c-b\,, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\int_c^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \int_{c-a}^{c-b} \frac{1}{y^\alpha}\,dy\,.$$

Quindi, ponendo $d = c - b$ (e osservando che $c \to b^+$ implica $d \to 0^+$), ricaviamo

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \lim_{d\to 0^+} \int_d^{b-a} \frac{1}{y^\alpha}\,dy = \int_0^{b-a} \frac{1}{y^\alpha}\,dy\,.$$

Di conseguenza, troviamo:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge per } \alpha < 1\,, \\ \\ \text{diverge per } \alpha \geq 1\,. \end{cases}$$

3) Studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,, \qquad (3)$$

dove $a > 0$ è un numero assegnato e α è un arbitrario numero reale.
Per definizione:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to +\infty} \int_a^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,.$$

Analogamente al caso 1), per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$, con $c > a > 0$, si calcola:

$$\int_a^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^c = \dfrac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,, & \alpha \neq 1 \\ \\ [\log|x|]_a^c = \log(c) - \log(a)\,, & \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Quindi:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{c\to+\infty} \dfrac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}\,, \ \alpha > 1 \\ \\ +\infty\,, \ \alpha < 1 \end{cases} \\ \\ \lim\limits_{c\to+\infty} (\log(c) - \log(a)) = +\infty\,, \alpha = 1\,. \end{cases}$$

4) Studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx\,, \tag{4}$$

dove $a > 1$ è un numero assegnato e α è un arbitrario numero reale.
Per definizione:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx\,.$$

Ci si riduce ad un integrale improprio del tipo (3), attraverso un opportuno cambiamento di variabile di integrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, tale che $a < c$, effettuiamo nell'integrale

$$\int_a^c \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx$$

il cambiamento di variabile $y = \log x$. Si calcola

$$\begin{array}{l} dy = \dfrac{1}{x}\, dx\,, \\ x = a \;\; \to \;\; y = \log a\,, \\ x = c \;\; \to \;\; y = \log c\,, \end{array}$$

quindi

$$\int_a^c \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx = \int_{\log a}^{\log c} \frac{1}{y^\alpha}\, dy,\,. \tag{5}$$

Poiché $c \to +\infty$ implica $\log c \to +\infty$, passando al limite per $c \to +\infty$ in (5), se ne deduce che:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \int_{\log a}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(\log a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\,, & \alpha > 1\,, \\ \\ +\infty\,, \quad \alpha \leq 1\,. \end{cases}$$

5) Studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^a \frac{1}{x|\log x|^\alpha}\, dx\,, \tag{6}$$

dove $0 < a < 1$ è un numero assegnato e α è un arbitrario numero reale.
Per definizione:

$$\int_0^a \frac{1}{x|\log x|^\alpha}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^a \frac{1}{x|\log x|^\alpha}\, dx\,.$$

Ci si riduce ad un integrale improprio del tipo (4), attraverso un opportuno cambiamento di variabile di integrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, tale che $0 < c < a$, effettuiamo nell'integrale

$$\int_c^a \frac{1}{x|\log x|^\alpha}\, dx$$

il cambiamento di variabile $y = \dfrac{1}{x}$. Si calcola

$$\begin{aligned}
&dy = -\frac{1}{x^2}\, dx\,, \\
&x = c \;\to\; y = \frac{1}{c}\,, \quad x = a \;\to\; y = \frac{1}{a}\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_c^a \frac{1}{x|\log x|^\alpha}\, dx = -\int_c^a \frac{x}{|\log x|^\alpha}\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= -\int_{c^{-1}}^{a^{-1}} \frac{1}{y\left|\log \frac{1}{y}\right|^\alpha}\, dy \tag{7}$$

$$= \int_{a^{-1}}^{c^{-1}} \frac{1}{y|-\log y|^\alpha}\, dy = \int_{a^{-1}}^{c^{-1}} \frac{1}{y(\log y)^\alpha}\, dy\,.$$

Poiché $c \to 0^+$ implica $c^{-1} \to +\infty$, passando al limite per $c \to +\infty$ in (5), se ne deduce che:

$$\int_0^a \frac{dx}{x|\log x|^\alpha} = \int_{a^{-1}}^{+\infty} \frac{dy}{y(\log y)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(\log(a^{-1}))^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\,, \ \alpha > 1\,, \\ \\ +\infty\,, \ \alpha \le 1\,. \end{cases}$$

6) Studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} e^{\alpha x}\, dx\,, \tag{8}$$

dove a è un numero reale assegnato e α è un arbitrario numero reale.
Per definizione:

$$\int_a^{+\infty} e^{\alpha x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c e^{\alpha x}\, dx\,.$$

Per $c \in \mathbb{R}$, con $c > a$, fissato:

$$\int_a^c e^{\alpha x}\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_a^c = \dfrac{1}{\alpha}(e^{\alpha c} - e^{\alpha a})\,, & \alpha \neq 0\,, \\ [x]_a^c = c - a\,, & \alpha = 0\,. \end{cases}$$

Quindi:

$$\int_a^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{e^{\alpha a}}{\alpha}\,, & \alpha < 0\,, \\ \\ +\infty\,, & \alpha \geq 0\,. \end{cases}$$