NUMERI REALI: DA $\mathbb{Q}$ AD $\mathbb{R}$

Due "grandezze" x ed y sono *commensurabili* se $\exists\, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad nx = my$$

Esitono grandezze **NON** commensurabili!!

$\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE

Teorema. Se il numero d soddisfa $d^2 = 2$ allora d non è razionale (formalmente: $d^2 = 2 \Rightarrow d \notin \mathbb{Q}$)

DIM. Per <u>assurdo</u>.
Supponiamo $\exists\, m, n \in \mathbb{N}^+$ tali che

$$d = \frac{m}{n}$$

con m, n <u>primi fra loro</u> (cioè privi di fattori comuni).

$$d = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2 = d^2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 \text{ pari} \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ pari}$$

Dunque $\exists\, k \in \mathbb{N}^+$: $m = 2k$. Sostituendo in $m^2 = 2n^2$ ricaviamo:

$$4k^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; n^2 = 2k^2 \;\Rightarrow\; n^2 \text{ pari} \;\Leftrightarrow\; n \text{ pari}$$

ASSURDO: m ed n sono primi fra loro!! Dunque $d \notin \mathbb{Q}$. C.V.D.