Estrazione di radice in $\mathbb{C}$: un esempio

Determiniamo le radici cubiche di $z = -8$ in $\mathbb{C}$.
Forma trigonometrica/esponenziale di -8:

$$z = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8e^{i\pi}\,.$$

• In $\mathbb{R}$, -8 ha <u>una radice cubica</u>: -2

• In $\mathbb{C}$, -8 ha <u>tre radici cubiche distinte</u>

• $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$ è una radice cubica di -8 se e solo se:

$$w^3 = 8e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r^3e^{i3\phi} = 8e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\phi = \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \phi_k = \dfrac{\pi}{3} + 2k\dfrac{\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le uniche radici cubiche <u>distinte</u> sono:

$$k = 0: \quad z_0 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 1: \quad z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi} = -2$$

$$k = 2: \quad z_2 = 2\Big(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\Big) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$