Equazioni differenziali a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo

$$u' = f(t)g(u)\,, \tag{1}$$

in cui $f \in C^0(I)$ e $g \in C^0(J)$ sono funzioni assegnate su intervalli reali I e J.
Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} u' = f(t)g(u) \\ u(t_0) = u_0\,, \end{cases} \tag{2}$$

con $t_0 \in I$ e $u_0 \in J$.

1. Per risolvere il problema (2), si segue un procedimento formale (detto di *separazione delle variabili*) molto utile nelle applicazioni (esso può giustificarsi pienamente anche da un punto di vista teorico, ma non ce ne occuperemo): ponendo $u' = \frac{du}{dt}$, riscriviamo

l'equazione (1) nella forma

$$\frac{du}{dt} = f(t)g(u)\,,$$

quindi, dividiamo ambo i membri per $g(u)$ e "moltiplichiamo" ambo i membri per dt, ottenendo

$$\frac{du}{g(u)} = f(t)\,dt\,.$$

Integrando ambo i membri dell'ultima equazione, tenendo conto della condizione iniziale $u(t_0) = u_0$, si ha

$$\int_{u_0}^{u} \frac{dv}{g(v)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\,. \tag{3}$$

Se $G(u)$ è una primitiva di $\frac{1}{g(u)}$ (su un intervallo reale $J_0 \subset J$ contenente u_0) e $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$ (su un intervallo reale $I_0 \subset I$ contenente t_0), allora la relazione suddetta si riscrive nella forma

$$G(u) - G(u_0) = F(t) - F(t_0)\,. \tag{4}$$

Questa relazione definisce, in forma implicita, la soluzione $u = u(t)$ del problema (2). Se la funzione G

è invertibile (su J_0) allora l'equazione implicita (4) si riscrive in forma esplicita come

$$u = G^{-1}\left(F(t) - F(t_0) + G(u_0)\right) . \tag{5}$$

2. Il metodo pone qualche difficoltà se $g(u_0) = 0$, perchè la formula (3) prevederebbe in questo caso di integrare una funzione ($\frac{1}{g(u)}$) con un asintoto verticale in $u = u_0$); in tal caso però si vede subito che il problema (2) ammette come soluzione la funzione costante $u(t) = u_0$.

2. Se lasciamo u_0 generico in (3) (oppure in (4), (5)), cioè lo poniamo uguale ad una costante arbitraria c, otteniamo al variare di c tutte le soluzioni dell'equazione (1).

<u>Esempio 1</u>. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e^u \\ u(2) = 7\,. \end{cases} \tag{6}$$

L'equazione differenziale è del tipo (1), con $f(t) = 1$ e $g(u) = e^u$.
Si ha, ponendo $u' = \frac{du}{dt}$ (e notando che $e^u \neq 0$, $\forall\, u$)

$$\frac{du}{e^u} = dt$$

da cui

$$\int_7^u \frac{dv}{e^v} = \int_2^t ds\,.$$

Integrando, otteniamo:

$$\left[-e^{-v}\right]_7^u = t - 2\,,$$

quindi:

$$e^{-u} = e^{-7} + 2 - t$$

ed infine, dato che e^{-u} è invertibile,

$$u = -\log\left(e^{-7} + 2 - t\right)\,.$$

<u>Esempio 2.</u> Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u' = 2t\sqrt{1 - u^2}\,. \tag{7}$$

L'equazione è del tipo (1), con $f(t) = 2t$ e $g(u) = \sqrt{1-u^2}$ (in questo caso $I = \mathbb{R}$ e $J = [-1,1]$)
Risolviamo il problema di Cauchy per l'equazione (7)

$$\begin{cases} u' = 2t\sqrt{1-u^2} \\ u(0) = c \end{cases} \tag{8}$$

con dato iniziale $c \in [-1,1]$ generico.
Poichè $g(\pm 1) = 0$, per $c = -1$ oppure $c = +1$, la soluzione del problema (8) è data rispettivamente da $u(t) = -1$ oppure $u(t) = 1$.
Per $-1 < c < 1$, la funzione $g(u) = \sqrt{1-u^2}$ si mantiene diversa da zero in un intervallo $J_0 \subset [-1,1]$ contenente c; perciò la soluzione di (8) si ottiene per separazione delle variabili. Si calcola:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2t\,dt\,,$$

da cui, integrando,

$$\int_c^u \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = 2\int_0^t s\,ds\,;$$

quindi

$$\arcsin u - \arcsin c = t^2$$

ed infine

$$u = \sin(t^2 + \arcsin c)$$

Riassumendo, le soluzioni dell'equazione (7) sono tutte e sole le funzioni

$$u(t) = 1\,, \quad u(t) = -1\,,$$

$$u(t) = \sin(t^2 + \arcsin c) = \sin(t^2 + d)\,,$$

con c costante arbitraria in $(-1, 1)$ (oppure $d = \arcsin c$ costante arbitraria in $(-\pi/2, \pi/2)$)