Equazioni differenziali lineari di ordine n

Si tratta di equazioni del tipo

$$u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \dots$$
$$\dots + a_{n-1}(t)u'(t) + a_n(t)u(t) = f(t)\,, \quad t \in I\,, \tag{1}$$

con n intero ≥ 1 ed $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo reale, in cui $a_k(t) \in C^0(I)$, per $k = 1, \dots, n$, sono funzioni assegnate dette *coefficienti* dell'equazione e $f \in C^0(I)$ è anche una funzione assegnata detta *termine noto* dell'equazione.

Si chiama *equazione omogenea associata* alla (1), l'equazione lineare di ordine n che si ottiene uguagliando a zero il primo membro della (1), cioè l'equazione

$$\begin{aligned} &u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \dots \\ &\dots + a_{n-1}(t)u'(t) + a_n(t)u(t) = 0\,, \quad t \in I\,, \end{aligned} \tag{2}$$

A sua volta, la (1) viene detta *equazione completa*.

La **strategia generale** per la soluzione dell'equazione (1) consiste dei seguenti passi:

1. Determinazione di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (2); questo si riduce alla determinazione di un sistema $\{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$ di n soluzioni *linearmente indipendenti* della (2). Una volta noto un tale sistema, ogni soluzione della (2) sarà una combinazione lineare della forma

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 u_1(t) + \cdots + c_n u_n(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t)\,, \quad t \in I\,, \end{aligned} \tag{3}$$

   con $c_1, \ldots, c_n$ costanti reali arbitrarie.

2. Ricerca di una soluzione particolare $w(t)$ dell'equazione completa (1).

Dalle note proprietà delle soluzioni delle equazioni lineari, discende che ogni soluzione dell'equazione completa (1) è della forma

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t) + w(t)\,, \quad t \in I\,, \tag{4}$$

per opportune costanti $c_1, \ldots, c_n$.

Produrre un sistema di n soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione omogenea (2) è, in generale, un problema difficile.
Un procedimento algoritmico generale è noto nel caso delle equazioni lineari *a coefficienti costanti*.

Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Si tratta di equazioni del tipo

$$\begin{aligned} &a_0 u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots \\ &\quad \cdots + a_{n-1} u'(t) + a_n u(t) = f(t)\,, \quad t \in I\,, \end{aligned} \tag{5}$$

in cui a_k ($a_0 \neq 0$), per $k = 1, \dots, n$, sono numeri reali assegnati (sono i coefficienti della (5)) ed $f \in C^0(I)$ è una funzione assegnata (è il termine noto della (5)).

Equazione omogenea

Per determinare un sistema di n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata a (5), cioè

$$\begin{aligned} a_0 u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \dots \\ \dots + a_{n-1} u'(t) + a_n u(t) = 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

risolviamo l'equazione algebrica di grado n

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0\,, \tag{7}$$

detta *equazione caratteristica* associata alla (6).

Caso $n = 2$. Per cominciare, illustriamo il metodo nel caso di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine 2, cioè

$$a u''(t) + b u'(t) + c u(t) = 0\,, \tag{8}$$

con a, b, c numeri reali assegnati, ed $a \neq 0$ (con riferimento alla forma generale in (6), qui $a = a_0$, $b = a_1$ e $c = a_2$).
L'equazione caratteristica associata a (8) è

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{9}$$

Distinguiamo tre casi.

Caso i: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. La (9) ammette due soluzioni reali, semplici (cioè di molteplicità 1)

$$\lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e un sistema di soluzioni linearmente indipendenti di (8) è costituito dalle funzioni

$$u_-(t) = e^{\lambda_- t}, \qquad u_+(t) = e^{\lambda_+ t}. \tag{10}$$

In questo caso, tutte le soluzioni di (8) sono del tipo

$$u(t) = c_- e^{\lambda_- t} + c_+ e^{\lambda_+ t}, \quad c_-, c_+ \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Caso ii: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. La (9) ammette una soluzione reale, di molteplicità 2

$$\widetilde{\lambda} = -\frac{b}{2a}$$

e un sistema di soluzioni linearmente indipendenti di (8) è costituito dalle funzioni

$$\widetilde{u}_0(t) = e^{\widetilde{\lambda}t}, \qquad \widetilde{u}_1(t) = te^{\widetilde{\lambda}t}. \tag{12}$$

In questo caso, tutte le soluzioni di (8) sono del tipo

$$u(t) = c_0 e^{\widetilde{\lambda}t} + c_1 t e^{\widetilde{\lambda}t} = (c_0 + c_1 t)e^{\widetilde{\lambda}t}, \; c_0, c_1 \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Caso iii: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. La (9) ammette due soluzioni complesse coniugate, di molteplicità 1

$$\alpha \pm \beta i = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}i}{2a},$$

e un sistema di soluzioni linearmente indipendenti di (8) è costituito dalle funzioni

$$v(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)\,, \qquad w(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)\,. \qquad (14)$$

In questo caso, tutte le soluzioni di (8) sono del tipo

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ &= e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \qquad (15)$$

Esempio 1. Risolviamo l'equazione $u'' - u = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_\pm = \pm 1$. Dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(t) = c_+ e^t + c_- e^{-t}\,, \quad c_+, c_- \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 2. Risolviamo l'equazione $u'' - 2u' + u = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, che ammette come unica soluzione $\widetilde{\lambda} = 1$, di molteplicità 2. Dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(t) = (c_0 + c_1 t)e^t\,, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 3. Risolviamo l'equazione $u'' + u' + u = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Si ha $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, e dunque le soluzioni dell'equazione caratteristica sono:

$$\alpha \pm \beta i = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\,.$$

Ne deriva che la soluzione generale dell'equazione differenziale è del tipo:

$$u(t) = e^{-t/2}\left[d_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + d_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\,,$$

con $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Caso generale ($n \geq 2$). Si procede come nel caso $n = 2$.
Ricordiamo che l'equazione omogenea è

$$a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u' + a_n u = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{16}$$

e l'equazione caratteristica associata è

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0\,. \tag{17}$$

La (17) ammette n soluzioni in campo complesso, contando ciascuna soluzione con la propria molteplicità (Teorema fondamentale dell'algebra).
Ad ogni soluzione $\widetilde{\lambda}$ di molteplicità $\widetilde{r} \geq 1$ della (17) si associano $\widetilde{r}$ soluzioni particolari dell'equazione omogenea (16), secondo lo schema seguente.

a) Se $\widetilde{\lambda}$ è soluzione reale di (17), di molteplicità $\widetilde{r} \geq 1$, ad essa si associano le $\widetilde{r}$ soluzioni

$$\widetilde{u}_0(t) = e^{\widetilde{\lambda} t}\,,\ \widetilde{u}_1(t) = t e^{\widetilde{\lambda} t}\,,\ \ldots\ , \widetilde{u}_{\widetilde{r}-1}(t) = t^{\widetilde{r}-1} e^{\widetilde{\lambda} t}$$

b) Se $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} i$ e $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} i$ sono soluzioni complesse coniugate di (17), ciascuna di molteplicità $\widetilde{r} \geq 1$, ad esse si associano le $2\widetilde{r}$ soluzioni

$$\widetilde{v}_0(t) = e^{\widetilde{\alpha}t}\cos(\widetilde{\beta}t)\,,\ \widetilde{v}_1(t) = te^{\widetilde{\alpha}t}\cos(\widetilde{\beta}t)\,,$$
$$\dots\ , \widetilde{v}_{\widetilde{r}-1}(t) = t^{\widetilde{r}-1}e^{\widetilde{\alpha}t}\cos(\widetilde{\beta}t)$$

$$\widetilde{w}_0(t) = e^{\widetilde{\alpha}t}\sin(\widetilde{\beta}t)\,,\ \widetilde{w}_1(t) = te^{\widetilde{\alpha}t}\sin(\widetilde{\beta}t)\,,$$
$$\dots\ , \widetilde{w}_{\widetilde{r}-1}(t) = t^{\widetilde{r}-1}e^{\widetilde{\alpha}t}\sin(\widetilde{\beta}t)$$

L'insieme formato dalle soluzioni particolari di (16) che si associano ad ogni soluzione di (17), secondo lo schema precedente, costituisce un sistema di n soluzioni linearmente indipendenti. Quindi, ogni soluzione di (16) si esprime come combinazione lineare delle n soluzioni particolari trovate.

Esempio 4. Risolviamo l'equazione lineare di ordine 4

$$u'''' - 2u''' + 5u'' - 8u' + 4u = 0\,.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 4) = 0\,.$$

Le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$1 \text{ di molteplicità } 2\,, \quad \pm 2i \text{ di molteplicità } 1$$

Dunque la soluzione generale dell'equazione è

$$u(t) = c_0 e^t + c_1 t e^t + d_1 e^{0t} \cos(2t) + d_2 e^{0t} \sin(2t)$$

$$= (c_0 + c_1 t) e^t + d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t)\,.$$

con $c_0, c_1, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Equazione completa

Veniamo adesso alla considerazione dell'equazione completa

$$a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u' + a_n u = f(t) \tag{18}$$

Come osservato in precedenza nel caso generale, la determinazione della soluzione generale di (18) si riconduce alla determinazione di una sua soluzione particolare. Nel caso di un termine noto $f(t)$ generale, trovare una soluzione particolare di (18) è un problema difficile. Esso può semplificarsi nel caso di un termine noto della forma:

$$f(t) = e^{\alpha t} P_k(t) \cos(\beta t)$$

$$\text{oppure} \tag{19}$$

$$f(t) = e^{\alpha t} P_k(t) \sin(\beta t)$$

in cui α e β sono numeri reali assegnati e $P_k(t)$ è un assegnato polinomio di grado $k \in \mathbb{N}$ in t. Sono esempi di termini noti della forma predetta le funzioni:

$$f(t) = t^2 e^t\,, \;\; f(t) = 5t^3 + 2t - 1\,, \; f(t) = \cos(4t)\,.$$

Per trovare una soluzione particolare di (18) con termine noto della forma (19), si considera il numero complesso

$$\widetilde{\lambda} = \alpha + \beta i$$

e si distinguono due casi.

(1) Se $\widetilde{\lambda}$ non è soluzione dell'equazione caratteristica

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

allora esiste una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{v}(t) = e^{\alpha t} \left[Q_k(t) \cos(\beta t) + R_k(t) \sin(\beta t) \right] ,$$

in cui $Q_k(t)$ e $R_k(t)$ sono polinomi in t, di grado $\leq k$.

(2) Se $\widetilde{\lambda}$ è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità $h \geq 1$, allora esiste una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{v}(t) = t^h e^{\alpha t} \left[Q_k(t) \cos(\beta t) + R_k(t) \sin(\beta t) \right] ,$$

in cui $Q_k(t)$ e $R_k(t)$ sono polinomi in t, di grado $\leq k$.

I polinomi $Q_k(t)$ ed $R_k(t)$ si determinano sostituendo direttamente nell'equazione differenziale ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 5. Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione

$$u'' - 2u = 2e^t .$$

Il termine noto dell'equazione $f(t) = 2e^t$ è della forma $(19)_1$, con $k = 0$, $P_k(t) = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

che ammette soluzioni $\pm\sqrt{2}$. Poichè $\widetilde{\lambda} = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, l'equazione differenziale ammetterà una soluzione particolare della forma

$$\widetilde{v}(t) = ce^t\,,$$

per un'opportuna costante reale c. La costante c si determina sostituendo direttamente la $\widetilde{v}$ nell'equazione differenziale, ed imponendo che essa sia soluzione.
Si trova

$$\widetilde{v}''(t) - 2\widetilde{v}(t) = ce^t - 2ce^t = 2e^t\,,$$

da cui $c = -2$. Concludiamo che la soluzione cercata è $\widetilde{v}(t) = -2e^t$.

Esempio 6. Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione

$$u'' + 4u = 2 + \sin(2t)\,. \tag{20}$$

Il termine noto $f(t) = 2 + \sin(2t)$ è somma di due funzioni

$$f_1(t) = 2 \quad \text{e} \quad f_2(t) = \sin(2t)$$

che sono della forma (19).
Grazie alla linearità, per trovare una soluzione particolare di (20), basta trovare due soluzioni particolari delle corrispondenti equazioni differenziali con termini noti $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, e poi sommarle tra loro. Troviamo allora $\widetilde{v}_1(t)$ e $\widetilde{v}_2(t)$ che risolvono rispettivamente

$$u'' + 4u = 2\,, \tag{21}$$

$$u'' + 4u = \sin(2t)\,. \tag{22}$$

Una soluzione particolare di (20) è $\widetilde{v} = \widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2$.
Per quanto riguarda $f_1(t) = 2$, esso è del tipo $(19)_1$, con $k = 0$, $P_k(t) = 2$, $\alpha = \beta = 0$. Si ha che

$\widetilde{\lambda} = 0$ non è soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$, quindi (21) ha una soluzione particolare del tipo $\widetilde{v}_1(t) = c$. Sostituendo in (21) si ricava

$$4c = 2 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}\,.$$

Per quanto riguarda $f_2(t) = \sin(2t)$, esso è del tipo $(19)_2$, con $k = 0$, $P_k(t) = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Si ha che $\widetilde{\lambda} = 2i$ è soluzione di molteplicità 1 dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$, quindi (22) ha una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{v}_2(t) = t\left[d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t)\right]\,.$$

Le costanti d_1 e d_2 si determinano imponendo che $\widetilde{v}_2(t)$ sia soluzione di (22). Si calcola:

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_2'(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t) \\ +t\left[-2d_1 \sin(2t) + 2d_2 \cos(2t)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_2''(t) = -4d_1 \sin(2t) + 4d_2 \cos(2t) \\ +t\left[-4d_1 \cos(2t) - 4d_2 \sin(2t)\right]\end{aligned}$$

da cui, sostuituendo in (22), si trova

$$-4d_1 \sin(2t) + 4d_2 \cos(2t) = \sin(2t)\,,$$

da cui si ricava che devono essere

$$d_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad d_2 = 0\,.$$

Si ha dunque

$$\widetilde{v}_2(t) = -\frac{1}{4} t \cos(2t)\,.$$

In conclusione, una soluzione particolare di (20) è data da

$$\widetilde{v}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t \cos(2t)\,.$$