Formule di derivazione

Attenzione! Le formule del calcolo delle derivate si possono utilizzare solo per il calcolo di derivate *la cui esistenza è già nota*; in altre parole, le formule di derivazione *non si possono utilizzare* per verificare l'*esistenza* delle derivate.
Consideriamo, per esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{per } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{per } x = 0\,. \end{cases}$$

I Teoremi sulla derivazione del prodotto e della composizione di funzioni derivabili ci danno che la funzione f è derivabile <u>per $x \neq 0$</u>, e, con le formule di derivazione, otteniamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0\,. \end{aligned}$$

L'espressione predetta non è definita per $x = 0$; questo però non significa necessariamente che la derivata prima di f in $x = 0$ non esista! In $x = 0$ le ipotesi dei teoremi sul calcolo delle derivate *non sono soddisfatte* perchè la funzione $r(x) = \frac{1}{x}$ (coinvolta nell'espressione analitica di f) non è derivabile in $x = 0$; di conseguenza, le regole di derivazione, utilizzate nei passaggi precedenti per il calcolo di $f'(x)$ quando $x \neq 0$, non possono essere applicate nel calcolo di $f'(0)$. Ma i teoremi sul calcolo delle derivate forniscono solo delle condizioni *sufficienti* (*e* <u>*non necessarie*</u>) per l'esistenza delle derivate.
Si può anche osservare che, in questo caso, non esiste

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Nemmeno questo, però, ci permette di dedurre che $f'(0)$ *non esiste.*
Per verificare l'esistenza (o meno) della derivata prima di f in $x = 0$, dobbiamo ricorrere alla definizione di derivata prima cioè calcolare il limite del rapporto

incrementale

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \, .$$

Si trova così

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \, ,$$

da cui si conclude che $f'(0) = 0$.