Derivazione della funzione reciproca e del quoziente

Teorema. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale, x_0 un punto interno ad I e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0, con $g(x_0) \neq 0$. Allora le funzioni $\dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$ sono derivabili in x_0 e si ha:

$$(1) \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,;$$

$$(2) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

Dimostrazione. Si noti per prima cosa che la derivabilità di g in x_0 implica la continuità di g in x_0; inoltre, poiché $g(x_0) \neq 0$, il Teorema di permanenza del segno delle funzioni continue assicura che la funzione g si mantenga diversa da zero in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 contenuto in I, cioè in un intervallo

della forma $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ (con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo). Di conseguenza, le funzioni

$$\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

sono ben definite per qualsiasi $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.
La formula 1. è una conseguenza della formula di derivazione delle funzioni composte. Si osserva infatti che

$$\frac{1}{g}(x) = (r \circ g)(x) = r(g(x))\,, \quad \forall\, x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\,,$$

dove $r(y) = \dfrac{1}{y}$, per $y \neq 0$, è la funzione di *passaggio al reciproco*. Poiché g è derivabile in x_0 e r è derivabile in $g(x_0) \neq 0$ (si ricordi che $r'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$ per $y \neq 0$), il Teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che $r \circ g$ sia derivabile in x_0; inoltre, si calcola

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = (r \circ g)'(x_0) = r'(g(x_0))g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

Verifichiamo adesso la seconda parte dell'enunciato. Da quanto precede, deduciamo che, nelle ipotesi fatte, sono derivabili in x_0 le funzioni f e $\frac{1}{g}$; pertanto il Teorema di derivazione del prodotto di funzioni derivabili, applicato ad f e $\frac{1}{g}$, implica che la funzione $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ sia anche derivabile in x_0 e, usando la formula di Leibniz e la (1) abbiamo:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g}(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$